DE MAXIMIS, ET MINIMIS

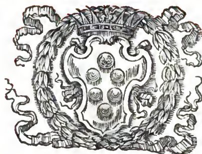
GEOMETRICA DIVINATIO

IN QVINTVM CONICORVM
APOLLONII PERGÆI
IAMDIV DESIDERATVM.

AD SERENISSIMVM
PRINCIPEM LEOPOLDVM
AB ETRVRIA.

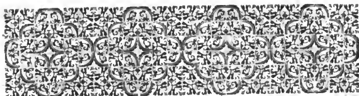
LIBER SECVNDVS.

AVCTORE
VINCENTIO VIVIANI.



FLORENTIÆ MDCLIX.

Apud Ioseph Cocchini, Typis Nouis, sub Signo STELLÆ.
SVPERIORVM PERMISSV.



SERENISSIMO

PRINCIPI LEOPOLDO

AB ETRVRIA.



BSVRDVM, aut insolens minimè quidem est SERENISSIME PRINCEPS, non tantùm aliena largiri, verùm etiam muneris nomine animo libenti propria suscipere. Quid enim vnquam Deo Opt. Max. mortales offerre posset, nisi suis quoque hostijs diuina benignitas oblectaretur? Quid ego Celsitudini tuæ, cuius patrocinio omnia debeo, nisi quę tua sunt tibi reddi magnanimè patereris? Ab impudentiæ nota me liberas, & frontem meam rubori subtrahis SERENISS. LEOPOLDE. Fidentiùs enim mentis meæ tenuissimos partus tibi nunc exhibere audeo, Regia namq; manu obstetrice, è tenebris in quibus delitescebant in lucem eductos, quos nuper vt proprios despiciebam, modò à perspicacissimo iudicio tuo in clientelam, atque, vt ita dicam, in liberorum locum humanissimè susceptos nonnihil æstimare cogor. Quid ergo lucubrationes hasce meas, quæ tuæ iam sunt, tibi ampliùs commendem? Quod te iubente lucem aspicerent, tuæ magnanimitatis beneficium fuit; quod tutæ à malo-

rum

rum inuidia te propugnante per Geometrarum eruditas manus incedant, tui in literas amoris beneficium erit. Hæc me alioquin, & iure, formidolosum bono esse animo efficaciter suadent. Et verè, si mihi Genethliacorum more diuinare liceret, non infelix futurum DIVINATIONIS meę fatum sperarem, quam nascentem fulgidissima lumina, Iuppiter, atque Apollo Etruriæ tam benignè aspexerunt. Hoc si vnquam videre dabitur, tuis auspicijs SERENISSIME PRINCEPS, non modò ingenium ad maiores conatus, sed & diu iacentē fortunam meam aliquando se se erecturam confido. Faxit Deus: qui (vt enixè precor) te, literarum præsidium, & decus seruet incolumem, & Heroicæ virtutis tuæ incœptis faueat.

Florentiæ Tertio Cal. Ian. 1658.

SER.MÆ CELS.NIS TVÆ

Humillimus, Obsequentiss. Obstrictiss. Seruus

Vincentius Viuiani.

VINCENTII VIVIANI
DE MAXIMIS, ET MINIMIS
Geometrica diuinatio in V. conic. Apoll. Pergæi.

LIBER SECVNDVS.

LEMMA I. PROP. I.

Si recta linea vtcunque secta fuerit: quadratum totius æquabitur quadrato vnius partis, vnà cum rectangulo sub tota, & dicta parte, tanquam ab vna linea, & sub altera parte contento.

ESTO data recta A B vtcunque secta in C. Dico quadratum AB æquale esse quadrato alterius partis, nempe A C, vnà cum rectangulo sub B A cum A C, tanquam vna linea, & sub reliqua parte B C comprehenso. Nam producta B A sumatur A D æqualis ipsi B C. Quoniam igitur D C est bifariam secta in A, ipsique adiecta C B, erit quadratum A B æquale rectangulo sub D B, B C, vnà cum quadrato C A; sed DB linea conficitur ex D A cum A B, vel ex A C cum A B; ergo quadratum totius A B æquatur quadrato partis C A, vnà cum rectangulo sub B A cum A C, tanquam vna linea, & sub reliqua parte B C comprehenso. Quod erat, &c.

D A C B

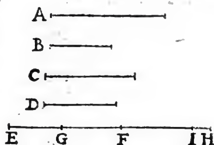
LEMMA II. PROP. II.

Si quatuor quantitatum eiusdem generis, prima superet secundam maiori excessu, quo tertia superat quartam, aggregatum extremarum maius erit aggregato mediarum.

SInt quatuor quantitates eiusdem generis A, B, C, D, & prima A superet secundam B, maiori excessu, quo tertia C superat quartam D. Dico aggregatum extremarum A, D maius esse aggregato mediarum B, C.

A Nam

Nam intelligatur magnitudo EF æqualis primæ A, FG verò æqualis secundę B; atque ipsis in directum magnitudo FH æqualis tertiæ C, & FI quartæ D. Erit excessus magnitudinis EF supra FG, hoc est EG, maior excessu quantitatis HF supra FI, siue maior ipso HI, ex suppositione, quibus addita communi quantitate GI, proueniet EI maior GH, siue aggregatum ex EF, & FI, nempe extremarum A, & D, maius aggregato ex GF, & FH, vel ex medijs B, & C. Quod erat, &c.



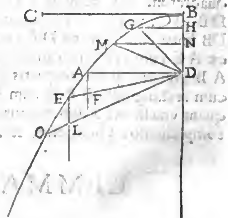
THEOR. I. PROP. III.

MINIMA linearum in Parabola ducibilium ad eius peripheriam à puncto axis intra sectionem sumpto, quod distet à vertice per interuallum non maius dimidio recti lateris, est ipsum axis segmentum inter punctum, & verticem interceptum. Aliarum verò ea, quæ cum MINIMA minorem constituit angulum, minor est.

ESto Parabole AB, cuius segmentum axis BD non excedat dimidium recti lateris BC datæ Parabolæ. Dico DB esse *MINIMAM* ducibilium ex eodem puncto D ad Parabolæ peripheriam AB, &c.

Applicetur axi ex D, recta DA. Erit quadratum AD *a* æquale rectangulo sub DB, & recto BC; sed rectangulum DBC maius est quadrato DB (cum latus rectum BC positum sit, vel duplum, vel magis quàm duplum ipsius BD) igitur quadratum AD maius erit quadrato DB, siue linea DA maior DB.

a Coroll. primę primi huius.



Rursus ducatur infra DA ex D quęcunque alia DE ad peripheriam, & ex A recta AF parallela ad BD, quæ tota ad partes F *b* cadet intra Parabolen; nec ei ad aliud punctum occurret quàm ad A; ideoque secabit eductam DE, vt in F, eritque ED maior DF, sed est DF maior DA (cum in triangulo DAF angulus ad A sit rectus, siue maior acuto ad F) & DA maior ipsa DB, vt supra ostendimus, quare DE multò maior erit ipsa DB.

b 26. primi conic.

Amplius sit quæcunque DG ducta ex D supra DA, & ex G applicetur GH. Cumque latus rectum BC sit maius aggregato BD cum DH (positum enim fuit BC non maius quàm duplum segmenti BD, estque

BD

B D maior D H) erit rectangulum sub recto C B in segmentum B H siue [a] quadratum G H, maius rectangulo sub aggregato B D cum D H, in idem segmentum B H, quibus addito communi quadrato D H, erit quadratum G H cum H D quadrato, siue vnicum quadratum G D, maius rectangulo sub aggregato B D cum D H in B H, vnà cum quadrato D H, siue [b] maius vnico quadrato B D, hoc est linea D G maior erit D B. Est ergo D B *MINIMA* ducibilium ad Parabolæ peripheriam ex axis puncto D, quod abest à vertice per interuallum non maius dimidio recti lateris B C. Quod primò demonstrandum erat.

[a] Coroll. primę primi huius.

[b] 1. h.

Præterea sit quæpiam alia D M maiorem efficiens angulum cum *MINIMA* D B, quàm D G, & ex M applicetur M N. Iam quadratum M N superat quadratum G H eo excessu, quo rectangulum C B N superat rectangulum C B H, (ob [c] æqualitatem) hoc est rectangulo sub recto C B in H N, sed quadratum D H [d] superat quadratum D N rectangulo sub eadem H N, & sub aggregato H D cum D N, quod aggregatum, ex hypotesi, minus est ipso recto B C, ergo excessus quadrati M N supra quadratum G H, maior est excessu quadrati H D supra D N, vnde aggregatum extremorum quadratorum M N, N D, siue vnicum quadratum M D, maius erit [e] aggregato quadratorum mediorum G H, H D, siue vnico quadrato G D, hoc est linea D M maior D G.

[c] Coroll. primę primi huius.

[d] 1. h.

[e] 2. h.

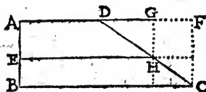
Vlteriùs, quadratum A D superat quadratum M N rectangulo sub D N, & recto B C, & quadratum D M, superat idem quadratum M N quadrato D N, quod est minus prædicto rectangulo sub D N, & recto C B, quare excessus quadrati A D supra M N, maior est excessu quadrati D M, supra idem quadratum M N; quapropter A D quadratum maius est quadrato D M, siue linea A D maior ipsa D M.

Tandem ducta quacunque D O infra D E, agatur ex E recta E L ęquidistans ad B D. Cum angulus B D E sit obtusus, erit quoque parallelarum alternus D E L obtusus, ideoque in triangulo D E L angulus D L E acutus, siue minor angulo D E L: quare latus D E minus latere D L, & eò minus educta D O. Vnde quæ minorem cum *MINIMA* constituit angulum minor est, &c. Quod omnino ostendere propositum fuit.

LEMMA III. PROP. IV.

Si inter latera parallela AD, BC, mensalis ABCD rectangulę ad B, ducta fuerit quædam linea EH ipsis lateribus æquidistans, sitq; AD minor BC. Dico rectangulum ABC, superare rectangulum AEH maiori excessu, quàm sit rectangulum EBC.

Completis enim rectãgulis EG, BF, EC; patet rectangulum ABC superare rectangulum AEH gnomone ECG, sed gnomon ECG maior est rectangulo EBC, vnde rectangulum ABC, superat rectangulum AEH maiori quantitate quàm sit rectãgulum EBC. Quod erat, &c.

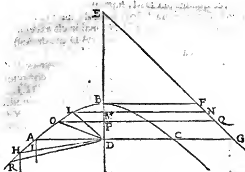


THEOR. II. PROP. V.

MINIMA linearum in Hyperbola ducibilium ad ipsius peripheriam à puncto axis intra sectionem sumpto, quod distet à vertice per interuallum, non maius quàm dimidium recti lateris, est idem axis segmentum inter punctum, & verticem interceptum. Aliarum autem, quæ cum MINIMA minorem constituit angulum minor est.

ESto Hyperbole ABC, cuius segmentum axis BD non excedat dimidium recti lateris BF (quod axi ordinatim applicetur, &c.) Dico DB esse *MINIMAM* ducibilium ex ipso puncto D ad Hyperbolæ peripheriam ABC, &c.

Sumatur in directum axi, transuersum latus BE, iungaturque regula EF, & producatur; appliceturque per D ordinata ADC, regulæ occurrens in G.



Iam, cum in triangulo EDG, sit DG maior BF, & BF maior segmento BD (ex hypotesi) erit DG eò maior ipso segmento DB, quare rectangulum GDB, a siue quadratum AD, maius erit quadrato DB; hoc est linea DA maior ipsa DB.

a Coroll. primę primi huius.

Eodem modò, ac in Parabola, ostendetur DA minorem esse quacunque educta DH infra DA, & DH adhuc minor DR, &c.

Nunc verò sit quælibet DL ducta ex D supra DA, & per L applicetur LM, quę producatur, donec regulæ EF occurrat in N. Erit in triangulo EDG, recta MN maior BF, sed BF maior est aggregato BD cum

DM

DM (cum latus rectum BF, vel duplum sit, vel plus quàm duplum ad BD) ergo MN ipso aggregato BD cum DM adhuc maior erit, vnde rectangulum sub NM in MB, [a] siue quadratum LM, maius erit rectangulo sub aggregato BD cum DM, in eadem MB, quibus communi addito quadrato MD, erit quadratum LM cum MD, siue vnicum quadratum DL, maius rectangulo sub BD cum DM in MB, vnà cum quadrato DM, siue maius vnico quadrato DB, quod prædicto [b] rectãgulo æquale est, siue linea DL maior DB. Quare segmentum axis DB, non excedens dimidium recti lateris BF, est *MINIMA* linearum ducibilium ex D ad Hyperbolæ peripheriam. Quod primò ostendere oportebat.

[a] Coroll. primæ primi huius.

[b] 1. huius.

Præterea, quadratum AD superat quadratum LM, eo excessu quo rectangulum BDG superat rectangulum BMN, (sunt [c] enim singula singulis æqualia) sed excessus rectanguli BDG supra rectangulum BMN maior est [d] rectangulo MDG, ergo quadratum AD superat quadratum LM maiori rectangulo quàm MDG; sed quadratum DL superat idem quadratum LM quadrato DM, quod minus est rectangulo MDG (nam est DG maior DM, cum superiùs demonstrata sit maior ipsa DB) ergo quadratum DA maius est quadrato DL, siue linea DA maior quacunque DL, intercepta inter applicatam DA, & axem DB.

[c] Coroll. primæ primi huius.

[d] 4. huius.

Ampliùs, ducatur alia quæpiam DO supra DA, sed remotior à segmento DB quàm DL, applicataque OP, producatur donec regulatrici EF occurrat in Q. Erit excessus quadrati OP supra quadratum LM, idem ac excessus rectanguli BPQ supra BMN (nam [e] sunt rectangula quadratis æqualia, vtrumque vtrique) sed excessus rectanguli BPQ supra BMN maior [f] est rectangulo MPQ, ergo excessus quadrati OP, supra quadratum LM, maior est rectangulo sub MP, & PQ; at excessus quadrati MD supra quadratum DP, minor est prædicto rectangulo (nam quadratum MD [g] superat quadratum DP, rectangulo sub MD cum DP in MP, quod est minus rectangulo sub QP in eadem MP, quoniam MD cum DP minor est recto latere BF, & eò minor ipsa QP, quę maior est BF) quare excessus quadrati OP supra LM, maior est excessu quadrati MD supra DP: duo igitur extrema simul quadrata OP, PD, siue vnicum quadratum DO, maius est duobus simul quadratis medijs LM, MD, hoc est vnico quadrato DL; siue linea DO maior est linea DL. Vnde quæ minorem efficit angulum cum *MINIMA* DB, minor est, &c. Quod fuit vltimò demonstrandum.

[e] Coroll. primæ primi huius.

[f] 4. huius.

[g] 1. huius.

* 2. huius

* * *

* *

*

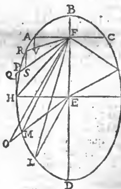
THEO-

THEOR. III. PROP. VI.

MAXIMA linearum ad vniuersam Ellipsis peripheriam ducibilium, à puncto maioris axis, quod non sit centrum, ea est, in qua centrum. Et eductarum ad peripheriam maioris Ellipticæ portionis, cuius basis, sit recta ad axim ordinatim ducta, ex prędicto puncto; quę cum MAXIMA minorem constituit angulum, maior est. MINIMA verò in eadem portione, est ipsa semi-applicata.

ESto Ellipsis ABCD, cuius axis maior BD, minor HI, centrum E, & quodlibet aliud punctum in maiori axe sit F. Dico *MAXIMAM* ducibilium ab F ad vniuersam Ellipsis peripheriam esse FD, in qua centrum.

Nam, quod DF sit maior reliqua FB patet, cum FD, maior sit axis dimidio, FB verò minor.



Iam, ad quodcunque Ellipticæ peripheriæ punctum G, sit quædam educta FG, & iungatur EG. Itaque cum semi-axis maior ED, sit [a] *MAXIMA* semi-diametrorum, ipsa maior erit EG, quibus communi addita EF, erit tota DF maior duobus GE, EF, & eò maior vnica FG. Quare FD est ad vniuersam peripheriam ducibilium *MAXIMA*.

a 86. primi huius.

Insuper applicetur ex F axi ordinata AFC, & ad peripheriam eiusdem quadrantis HDE, ductæ sint ex F duę quælibet FL, FM, & FL minorem, FM verò maiorem angulum efficiat cum *MAXIMA* FD. Dico FL maiorem esse FM. Iunctis enim EL, EM; erit [b] EL maior EM, quæ producatur, & fiat EO æqualis EL, & iungatur FO: erunt igitur duo latera FE, EL, duobus FE, EO æqualia, alterum alteri, sed angulus FEL maior est angulo FEO, ergo basis FL, maior est FO, sed FO maior est FM, (cum in triangulo FMO angulus ad M obtusus sit, eò quod sit maior obtuso FEM) quare FL eò maior erit ipsa FM, quę cum *MAXIMA* maiorem efficit angulum: simili modo ostendetur FM maiorem esse educta FH.

b ibidem.

De eductis verò ad portionem peripheriæ HA, ita ratiocinabimur. Sit enim quælibet FP, & per H sit Ellipsim contingens HQ, quæ cum æquidistet axi BFD, secabit omnino productam FP extra Ellipsim in Q; eritque in triangulo FQH, latus FH maius latere FQ (cum angulus

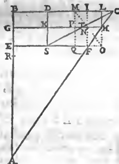
FQH

FQH sit obtusus, eò quod alterno QFB obtuso sit æqualis) sed est FQ maius FP, quare educta FH eò maior erit educta FP. Amplius ducta qualibet alia FR; adhuc maiorem angulum faciens cum *MAXIMA* FD, agatur per R recta RS axi FE parallela, quæ cadet intra Ellipsim, (cum sit ad minorem axim HI ordinatim ducta) secabitque FP in S, ac in triangulo FRS obtusiangulo ad R, erit latus FS maius latere FR, & educta FP eò maior educta FR; eademque ratione ostendetur quamlibet eductarum ad peripheriam HA, vtputa FR, maiorem esse semi-applicata FA, si ex A ducatur AV parallela ad EF, &c. quare eadem semi-applicata FA omnium eductarum in portione maiori ADC erit *MINIMA*. Aliarum autem, quæ cum *MAXIMA* FD maiorem angulum constituit, maior est. Quod omnino ostendere opus fuerat.

LEMMA IV. PROP. VII.

Si in triangulo ABC, cuius rectus angulus sit ad B, fuerit latus AB maius altero BC, sitque de maiori BA abscissa pars BE, quæ non excedat dimidium ipsius BC, & ex quolibet eius puncto G ducta sit GH parallela ad BC. Dico primùm ipsam GH semper maiorem esse aggregato BE cum EG. I.

Dcatur EF æquidistans ad BC. Et quoniam AB ponitur maior ipsa BC; BC verò dupla, vel plus quàm dupla ad BE, erit omnino AB plus quàm dupla ad BE, siue AE plus quàm dimidium ipsius AB, quod memento: sed, vt AE ad AB, ita EF ad BC; quare EF est maior dimidio ipsius BC, hoc est maior ipsa BE. Secta igitur ES æquali ipsi BE, ducatur SKD parallela ad BE, eritque BS parallelogrammum æquilaterum (cum EB, BS sint æquales) iungatur denique CS rectam GH secans in T.

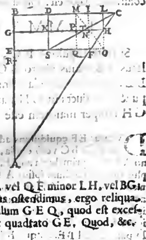


Itaque cum EB, siue BD posita sit æqualis, vel minor dimidio ipsius BC, erit CD æqualis, vel maior ipsa DB, vel DS. Cumque sit, vt CD ad DS, ita TK ad KS, erit quoque TK æqualis, vel maior ipsa KS, siue GE, quibus TK, & GE additis æqualibus KG, EB, proueniet tota TG æqualis, vel maior aggregato GE cum EB, sed est HG maior ipsa TG: quare HG erit omnino maior aggregato BE cum EG. Quod, &c.

Praeterea

2. Præterea, iisdem positis in eadem figura. Dico rectangulum BEF superare rectangulum BGH maiori excessu quàm sit quadratum GE.

Completis enim rectangulis BEFI, BGHL, productisque EF, LH vsque ad occursum in O; cum sit AE plusquàm dimidium ipsius AB, vt supra ostendimus, erit AE maior EB; cumque sit BA ad AE, ita BC ad EF, vel ad BI, erit diuidendo BE ad EA, vt CI ad IB, sed est BE minor ipsa EA, ergo, & CI minor erit ipsa IB, quare sumpta LM æquali ipsi CI punctum M non pertinget ad B.



Iam cum ML, IC sint equales, erit ML ad NH, vt IC ad NH, vel vt IF ad FN, vel vt LO ad OH, quare puncta M, N, O erunt in vna, eademque recta MNO. Postremò ducatur recta MPQ parallela ad BE. Erunt in rectangulo QL supplementa QN, LN inter se æqualia, quibus addito communi rectangulo BN, fiet gnomon GIQ æqualis rectangulo BH, sed excessus rectanguli BF supra gnomonem GIQ, est rectangulum GQ, quare excessus quoque rectanguli BF, supra BH, erit idem rectangulum GQ. Cumque sit CB minor BA, & vt CB ad BA, ita CL ad LH, erit quoque CL, vel MI, vel QF minor LH, vel BG, estque tota EF, maior tota EB, vt superiùs ostendimus, ergo reliqua QE maior erit reliqua EG, vnde rectangulum GEQ, quod est excessus rectanguli BEF supra BGH maius erit quadrato GE. Quod, &c.

3. Postremò iisdem positis, & constructis, concipiatur quoque alia BR maior quidem BE, sed minor adhuc dimidio ipsius BA, & non maior dimidio ipsius BC. Dico tandem excessum rectanguli BEF supra rectangulum BGH, quod est GEQ, maius esse excessu quadrati GR supra RE.

Nam, vt primo loco superiùs demonstrauimus, erit tota linea EF maior aggregato BR, cum RE, sed pars QF minor est parte BG prædicti aggregati (nam est QF æqualis MI, siue LC, & BG æqualis est LH, estque CL minor LH, cum sit data CB minor quoque BA) ergo reliqua EQ maior erit reliquo eiusdem aggregati, quod est GR cum RE; vnde rectangulum sub QE, & EG, quod est excessus rectanguli BEF supra BGH, maius erit rectangulo sub GE cum RE, in eadem GE: sed rectangulum sub GR cum RE, in GE, [a] est excessus quadrati GR supra RE, ideoque rectangulum BEF superat rectangulum BGH maiori excessu, quo quadratum GR superat quadratum RE. Quod tandem, &c.

[a] 1. huius.

THEO-

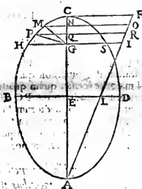
THEOR. IV. PROP. VIII.

MINIMA linearum ad vniuersam Ellipsis peripheriam ducibilium, à puncto maioris axis, quod distet à vertice per interuallum non maius dimidio recti lateris, est idem axis segmentum, inter datum punctum, & verticem interceptum.

Aliarum autem eductarum in minori portione Ellipsis, cuius basis, sit applicata per datum punctum; quæ cum MINIMA minorem angulum constituit, minor est.

ESto Ellipsis ABCD, cuius axis maior AC, minor BD, centrum E, & latus rectum maioris axis CA sit CF, & regula AF: segmentum verò CG, sit non maius dimidio CF. Dico primùm GC esse *MINIMAM* ducibilium ex G ad vniuersam Ellipsis peripheriam ABCD.

Quod enim GC, licet ponatur æqualis dimidio recti CE, sit minor reliquo axis segmento GA, patet: quoniam CA ad BD, est vt BD ad CF, & sumptis subduplis, CE ad EB, vt EB ad CG, estque CE maior EB, quare EB quoque maior est CG, & eò magis AE, immò AG maior GC.



Iam applicetur per G recta HGS, regulæ occurrens in I. Erit AE ad ad AC, vt EL ad CF, sed est AE dimidia AC, quare EL recti CF dimidia erit; estque GI maior EL, ergo GI maior est dimidio recti CF, & posita est GC non maior dimidio recti; ergo GC erit omnino minor GI, siue quadratum GC minus rectangulo CGI, siue [a] quadrato GH, hoc est linea GC minor ipsa GH, sed GH est [b] *MINIMA* ducibilium ex G ad peripheriam HAS, ergo GC eò ampliùs *MINIMA* erit ad eandem maioris portionis peripheriam HAS.

[a] Coroll. primę primi huius.
[b] 6. h.

Ampliùs, ad peripheriam minoris portionis HCS ducatur quęcunque GM, & per M applicetur MNO. Cum in triangulo rectangulo ACF ostensa sit CG minor quàm dimidium CA, sed posita sit non maior dimidio CF, & ex puncto N in CG sumpto, ducta sit NO parallela ad CF, erit NO maior aggregato CG cum GN, per primam partem 7. huius; ergo sumpta communi altitudine NC, erit rectangulum ONC, siue quadratum [c] MN maius rectangulo sub CG cum GN in NC: addito communi quadrato GN, erit quadratum MN cum quadrato NG, siue vnicum quadratum GM, maius rectangulo sub CG cum GN in NC, vnà

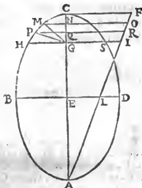
[c] Coroll. primę primi huius.

quadrato GN sed rectangulum C G cum G N, in N C, vnà cum quadrato GN, a conficit quadratum vnicæ CG, ergo quadratum GM maius est quadrato GC, siue linea GM maior GC: ex quò GC erit etiam *MINIMA* ductarum ex G ad peripheriam minoris portionis HCS. Vnde ipsa GC erit *MINIMA* ad totam peripheriam ABCD.

a 1. h.

Insuper rectangulum CGI superat rectangulum CNO spatio minori, quàm sit quadratum N G, per secundam partem 7. huius; quare (alijs sumptis b æqualibus) quadratum GH superabit quadratum MN maiori excessu quadrati GN; sed quadratum GM superat idem quadratum MN quadrato tantùm GN, ergo excessus quadrati GH supra NM, maior est excessu quadrati GM supra idem quadratum MN, quare quadratum GH maius est quadrato GM, siue linea GH maior GM.

b Coroll. primę primi huius.



Tandem ducatur GP minorem cōstituens angulum cum *MINIMA* GC quàm GM, applicetur que PQR. Erit excessus rectanguli CQR supra CNO maior excessu quadrati NG supra GQ, per tertiam partem 7. huius, ergo (permutatis æqualibus, c &c.) quadratum PQ superabit quadratum MN maiori excessu, quàm quadrati NG supra GQ: vnde aggregatum extremorum quadratorum PQ, GQ, siue vnicum quadratum GP, maius erit d aggregato mediorum MN, NG, siue vnico quadrato GM; hoc est linea GP erit maior linea GM. Quapropter linearum ex G ducibilium ad minoris portionis peripheriam HCS, quæ minorem angulum constituit cum *MINIMA* minor est. Quod erat vltimò demonstrandum.

c ibidem.

d 2. h.

Verùm prætermissa hac methodo mihi, vt fateor, molestiori, quod in quatuor præcedentibus theorematibus, quò ad MAXIMAS tantùm, & MINIMAS attinet, hic simul, & aliquid vltra, aliter, & expeditiùs demonstrabitur,



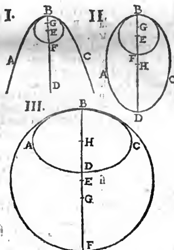
THEO-

THEOR. V. PROP. IX.

MINIMA linearum, ad peripheriam cuiuslibet coni-sectionis ducibilium à puncto axis (qui in Ellipsi sit axis maior) distans à vertice per interuallum non maius dimidio recti lateris, est idem axis segmentum inter assignatum punctum, & verticem interceptum. At in Ellipsi tantùm, MAXIMA est reliquum maioris axis segmentum, in quo centrum reperitur.

In Ellipsi verò circa minorem axim; MAXIMA ducibilium à puncto eiusdem axis, quod distet à vertice per interuallum non minus dimidio recti, est ipsum axis segmentum, inter assumptum punctum, & verticem interceptum. MINIMA verò est reliquum minoris axis segmentum, in quo centrum non reperitur.

1. ESto ABC quæcunque coni-sectio, vel Parabole, vel Hyperbole, vt in prima figura, vel Ellipsis, vt in secunda, circa maiorem axim BD, in quo sumptum sit punctum E, quod primò distet à vertice B per interuallum æquale dimidio recti lateris axis BD, quodq; in Ellipsi omnino minus erit semi-axe BH (est enim semi-axis maior ad semi-axim minorem, vt semi-axis minor ad semi-rectum.) Dico segmentum axis EB esse *MINIMAM* linearum ex E ducibilium ad sectionis peripheriam ABC, & reliquam BD, in qua est centrum, esse *MAXIMAM*.

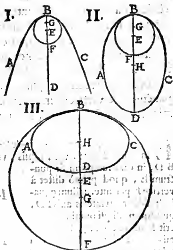


Descripto enim cum centro E, interuallo EB circulo BF, ipse cadet totus a intra sectionē ABC: quare, quę ex centro E ad sectionis peripheriam ducētur, præter ad B, omnino maiores erunt, quàm ductæ ex eodem centro ad circuli peripheriam, quibus æqualis est EB. Ergo ipsa EB erit *MINIMA*. a 1. Coroll. 20. 1. huius.

Si verò, distantia à vertice B fuerit minor eodem recti dimidio qualis est GB: cum ad peripheriam circuli BF ipsa GB sit *MINIMA*, eò magis *MINIMA* erit ad Ellipsis circumscriptam peripheriam ABCD.

2. At in secunda tantùm figura, quod reliquum maioris axis segmentum E D, vel G D sit *MAXIMA* ex E, vel G ducibilium, patet: quoniam circulus ex radio H D cadit totus [a] extra Ellipsim A B C D, sed in circulo, cuius radius H D, ipsa E D, vel G D est *MAXIMA*, cum in ea sit circuli centrum: quapropter E D, vel G D eò magis erit *MAXIMA* ad inscriptam Ellipsim A B C D. Quod erat primò, &c.

[a] 26. primi huius.



3. Iam in tertia figura sit A B C D Ellipsis circa minorem axim B D, in quo infra verticem B sumptum sit punctum E, quod à vertice distet per interuallum, quod primò sit æquale dimidio recti lateris axis B D. Dico E B esse *MAXIMAM* ex E ducibiliū ad Ellipsis peripheriam A B C D.

Si enim facto centro E, cum radio E B circulus describatur B F, ipse cadet totus [b] extra Ellipsim; vnde, quæ ex E ad Ellipsis peripheriam ducentur, præter ad B, minores erunt, quàm quę ex eodem E, ad circuli circumscriptam circumferentiam; hoc est minores ipsa E B. Quare E B erit *MAXIMA*, &c.

[b] 1. Coroll 20. 1. huius.

Si verò distantia à vertice B, maior fuerit eodem recti dimidio, qualis est G B: cum sit in circulo B F, ipsa G B, in qua est circuli centrum, *MAXIMA* ad eius peripheriam ducibilium, eò magis *MAXIMA* erit ad inscriptæ Ellipsis peripheriam A B C D.

4. Quod autem in eadem tertia figura reliquum minoris axis segmentum E D, vel G D, sit *MINIMA* ex E, vel G ducibilium ad Ellipsis peripheriam A B C D, sic manifestum fiet.

Quoniam circulus ex radio H D cadit totus [c] intra Ellipsim A B C D, sed ad peripheriam circuli ex radio H D ipsa E D, vel G D est *MINIMA*, cum in ea non sit circuli centrum: quare eadem E D, vel G D eò amplius erit *MINIMA* ducibilium ad eidem circulo circumscriptam Ellipsis peripheriam A B C D. Quod erat vltimò demonstrandum.

[c] 26. primi huius.

SCHOLIVM.

HOC loco animaduertendum est, semper in Ellipsi circa minorem axim, tertiæ figuræ, interuallum B E semi-recti lateris, omninò excedere minorem semi-axim B H, (cùm integrum rectum latus excedat integrum minorem axim, vt in primo Coroll. 20. primi huius monitum fuit) ac idem punctum E cadere posse in quocunq; puncto infra H, ha-

bita

bita tamen ratione proportionis inter minorem axim, & maiorem, quæ proportio, quò minor fuerit, eò magis E, terminus semi-recti lateris, remouebitur à centro H, vt vel modicè introspicienti satis constat.

THEOR. VI. PROP. X.

Si quamcunque coni-sectionem recta linea contingat, cui à tactu extra sectionem perpendicularis erigatur, in qua sumptum sit quodlibet punctum. Linea intercepta inter assumptum punctum, & contactum, erit MINIMA ducibilium ab eodem puncto, ad conuexam coni-sectionis peripheriam.

ESto coni-sectio A B C, quam contingat recta D E in B, à quo ipsi erecta sit perpendicularis BE ad partes conuexæ peripheriæ ABC, sitque in ea assumptum quodlibet punctum F: Dico rectam FB esse *MINIMAM* rectarum ducibilium ab F ad conuexam peripheriam A B C.

Hoc enim per se satis patet: nam cum FB sit perpendicularis rectæ D E, erit quoque *MINIMA* [a] ducibilium ad ipsam DE, quare FB eò magis erit *MINIMA* ducibilium ad conuexam ABC, quę cadit infra DE. Quod erat, &c.

a ex elementis.



Quod autem de coni-sectione hoc loco ostenditur, de quacunque etiam curua linea verificari ex ipsa figura satis patet, dummodo curua ABC sit tota ad alteram partem contingentis D E, perpendicularis verò BF ad aliam.

THEOR. VII. PROP. XI.

Si quamcunq; coni-sectionem recta linea, preter ad axis vertigem contingat, cui à tactu intra sectionem erigatur perpendicularis, in qua sumptum sit punctum quodlibet, non tamen, quò ad Ellipsim, vltra maiorem axim; linea intercepta inter assumptum punctum, & contactum erit MINIMA ducibilium ex eodem puncto, ad coni-sectionis peripheriam.

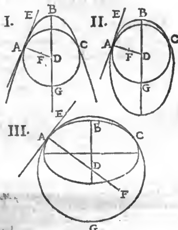
Si verò in Ellipsi assumptum punctum sin perpendiculari fuerit, vel in ipso minori axe, vel vltra: linea inter punctum, & contactum intercepta erit MAXIMA ducibilium ex ipsomet puncto ad Ellipsis peripheriam.

I. ESto ABC Parabole, vel Hyperbole, vt in prima figura, vel Ellipsis, vt in secunda, circa maiorem axim B D, quas in puncto A extra

axium

axium vertices contingat recta A E, cui intra sectionem ducta sit perpendicularis A D, quæ priùs maiori axi occurret, *a* vt in D. Dico rectam D A, & quamlibet ipsa minorem F A, esse *MINIMAM* ducibilium ad sectionis peripheriam A B C, ex punctis D, vel F.

a 88. primi h.



Nam facto centro D, interuallo D A, ac circulo descripto A C G, ipse cadet totus *b* intra sectionem A B C, in duobus tantùm punctis A, C, eam contingens: quare quę ducentur ex D ad sectionis peripheriam, pręter ad puncta A, C, interuallo D A maiores erunt: exquo ipsa D A, vel D C erit *MINIMA*, &c. Si verò interuallum F A minus sit ipso D A. Cum in circulo A C G ipsum F A diametri segmentum, in quo centrum non reperitur, sit rectarum *MINIMA* ad circuli peripheriam ducibilium, eò magis eadem F A *MINIMA* erit ducibilium ex F, ad peripheriam circumscriptę sectionis A B C. Quod erat primò, &c.

b 92. primi h.

2. Iam, in tertia figura, sit Ellipsis A B C, circa minorem axim B D, & contingens linea ad punctum A, quod non sit axium vertex, sit A E, cui ex contactu A, ducta sit intra sectionem recta A D, quę post occursum cum maiori axe, occurret quoque *c* minori, vt in D. Dico rectam D A, & quamlibet aliam F A ipsa D A maiorem, *MAXIMAM* esse ducibilium ex D, vel F, ad Ellipsis peripheriam A B C.

c 88. primi huius.

Descripto enim circulo A C G ex radio D A, ipse cadet totus *d* extra Ellipsim A B C hanc tantùm contingens in duobus punctis A, C; quapropter, quæ ducentur ex D ad Ellipsis peripheriam, præter ad puncta A, C, distantia D A minores erunt: vnde D A, vel D C erit *MAXIMA*, &c. Si autem interuallum F A maius fuerit ipso D A. Cum in circulo A C G in diametri segmento F A sit circuli centrum, ipsam F A, erit *MAXIMA* ad circuli peripheriam A C G ducibilium, & eò magis eadem F A *MAXIMA* ducibilium ex F, ad peripheriam inscriptæ Ellipsis A B C.

d 92. primi huius.

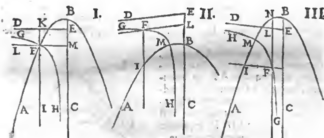
Quod erat vltimò demonstrandum.

THEO-

THEOR. VIII. PROP. XII.

Si per punctum quodlibet sumptum in angulo à rectis lineis comprehenso, quarum altera sit datæ Parabolæ, vel Hyperbolæ diameter, aut ipsi æquidistans, altera verò sit quælibet sectioni ordinatim ducta, vel huic parallela, descripta sit sectio Hyperbole, cuius asymptoti sint prædicti anguli latera; huiusmodi Hyperbole datam sectionem in vno tantùm puncto necessariò secabit.

ESto Parabole, vel Hyperbole A B, cuius diameter, vel diametro æquidistans sit B C, quàm ad quemcunque angulum D E C secet D E, quæ vel sit vna applicatarum in sectione, vel ipsis æquidistans, & in angulo D E C, per datum in eo punctum F, describatur [a] Hyperbole G F H, cuius asymptoti sint D E, E C. Dico hanc vltrò, citroque productam, in vno tantùm puncto sectionem secare. a 4. sec. conic.



Ductis enim, in prima figura, per punctum F, quod est in sectione A B, rectis L F M, I F K asymptotis D E, E C æquidistantibus, eisque occurrentibus in M, K. Patet rectam M F L etiam si in infinitum productam ad partes L, in ipso tantùm puncto F sectioni A B occurrere, cum sit vna applicatarum in data sectione; & rectam I F K in eodem tantùm puncto F cum sectione A B conuenire [b] cum ipsa rectæ B C, vel diametro datæ sectionis æquidistet; sed Hyperbole G F H à puncto F ad partes G, tota incedit in angulo K F L, & inter æquidistantes F L, K D; & à puncto F ad partes H, tota incedit in angulo M F I, ac inter parallelas F I, M C; quare ipsa Hyperbole G F H in nullo alio puncto quàm F sectioni A B occurret. b 26. primi conic.

In secunda verò, ac tertia figura, ductis ex dato puncto F (quod ibi extra cadit, hic verò intra sectionem) rectis F L, F I alteri asymptoto,

& se-

& ſectioni occurrentibus in L, I. Conſtat Hyperbolen ex F ad partes H omnino incedere intra angulum L F I, & cum ipſa in infinitum extendi poſſit, cumque in ſecunda figura ſpatium F I B ſit occluſum ad I, & ad rectam L B nunquam poſſit prouenire, eò quod ipſa L B ponatur Hyperbole G F H aſymptotos: in tertia verò cum ſpatium F I N ſit vndique occluſum, neceſſariò, in vtraque figura, deſcripta Hyperbole G F H in aliquo puncto datam ſectionem ſecabit. Sit ergo harum mutua interſectio punctum M, per quod ductis, vt factum fuit in prima figura, rectis lineis quæ aſymptotis E D, E C æquidiſtent, iiſdem penitus argumentis, ac in primo caſu, demonſtrabitur ipſam Hyperbolen in nullo alio puncto quàm M cum data ſectione A B conuenire. Quare ſi per punctum in angulo, &c. Quod erat demonſtrandum.

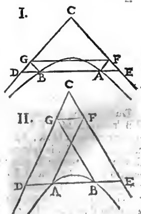
THEOR. IX. PROP. XIII.

Si in Hyperbola, ſumpta fuerint duo quælibet puncta, à quibus ductæ ſint aſymptotis æquidiſtantes, eiſque occurrentes: recta linea iungens occurſus; lineæ, data puncta iungenti, æquidiſtabit.

ESto Hyperbole A B, cuius aſymptoti C D, C E, ſumptaque ſint in ſectione duo quælibet puncta A, B, à quibus ductæ ſint A F, B G, aſymptotis æquidiſtantes. Dico iunctas A B, F G, eſſe inter ſe parallelas.

Nam vtrinque producta A B vſque ad aſymptotos in D, & E. a Erit in prima figura, B D æqualis A E: in ſecunda verò, cum ſit A D æqualis B E, addita communi A B, erit item D B æqualis ipſi A E. Sed in triangulis D B G, E A F, anguli ad D, B, æquantur angulis ad A, & E, vterque vtrique, ob parallelas D G, A F, & B G, E F; quare triangula D B G, A E F ſunt ſimilia inter ſe, ac propterea vt D B ad B G, ita A E ad E F, ſed antecedentes D B, A E ſunt æquales, vt modò oſtendimus, ergo, & conſequentes B G, E F, æquales erunt, at ſunt quoque inter ſe parallelæ, quare, & F G ipſi A B æquidiſtabit. Quod, &c.

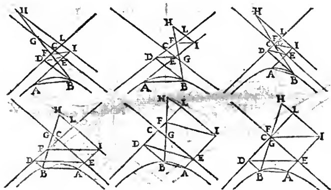
a 8. ſec. conic.



THEO.

THEOR. X. PROP. XIV.

Si in Hyperbola ſumpta fuerint duo quælibet puncta, è quorum vno ducta ſit recta linea, alteri aſymptoto æquidiſtans, aliamque ſecans; ex reliquo verò alia vtranque aſymptoton diuidens in angulo, qui aſymptotali deinceps eſt, à qua, producta in angulo ad verticem aſymptotalis, ſumatur ęqualis ei, quę ex ipſa inter prædictum punctum, & alteram aſymptoton intercipitur, atque ex ſumptæ termino ducta ſit parallela ei aſymptoto, cui prima eductarum occurrit, hanc ipſam ſecans: recta linea huiuſmodi interſectionem iungens cum puncto, in quo ſecunda eductarum eam aſymptoton ſecat, cui prima æquidiſtat, rectæ data puncta iungenti æquidiſtabit.

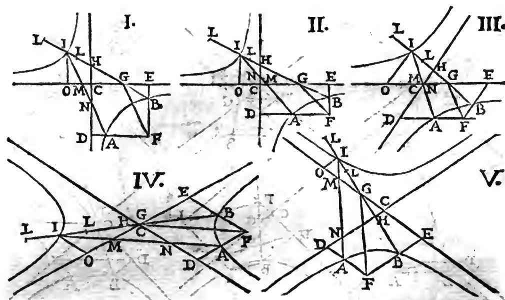


Sint in Hyperbola A B, cuius aſymptoti C D, C E, ſumpta duo quæcunque puncta A, B, è quorum altero A ducta ſit A E I alteri aſymptoto C D æquidiſtans, ex B verò quælibet B G F vtranque ſecans in G, & F; ſectaque G H in directum, & æquali ipſi B F, ducatur ex H recta H I parallela ad C E occurrens cum productis D C, A E in L, & I. Dico iunctas A B, F I eſſe inter ſe parallelas.

Ducta enim B D parallela ad C E, iunctaque D E, cum ſit B F æqualis G H, erit quoque D F æqualis C L, ob parallelas D B, G E, H I, ſed eſt C L æqualis ipſi E I, quare D F, & E I æquales erunt, ſuntque etiam parallelæ, ergo F I æquidiſtat ipſi D E, ſed eſt A B [a] æquidiſtans eidem D E, quare F I, & A B ſunt quoque inter ſe parallelæ. Quod, &c. [a] 13. h.

THEOR. XI. PROP. XV.

Si à puncto, quod est intra Hyperbolen, ductæ sint duæ rectæ lineæ asymptotis æquidistantes, & Hyperbolæ in duobus punctis occurrentes, è quorum altero ducta sit recta linea vtramque asymptoton secans, à qua, producta in angulo, qui asymptotalis est ad verticem; à puncto alteram asymptoton secans dematur æqualis ei, quę inter eductæ occursum cum alia asymptoto intercipitur: recta linea hoc idem occursum iungens cum dato puncto, æquidistabit rectæ, sumptæ terminum iungenti, & sectionis punctum, in quo conuenit recta alteri asymptoto ęquidistanter ducta.



Esto intra Hyperbolen A B, cuius centrum C, & asymptoti C D, C E vltra centrum productæ, sumptum quodcunque punctum F, à quo ductæ sint F A D, F B E asymptotis æquidistantes, quæ Hyperbolen secent in punctis A, B, è quorum altero, vt ex B, ducta sit quæcunque B I asymptoton C E secans in G, & C D in H, sumptaque H I æquali, & in directum ipsi B G, iungantur rectæ I A, G F. Dico has inter se esse parallelas.

Nam cum recta G H secet vtranque linearum C G, C H continentium angulum H C G, qui deinceps est angulo D C E Hyperbolen A B continenti, sitque ea (per constructionem) hinc inde æqualiter producta in B, I, & punctum B sit ad Hyperbolen A B, erit etiam punctum I ad ei oppositam sectionem. Si enim opposita sectio in alio puncto, pręter I, secaret

caret rectam GI, vt in L; tunc GL a æquaretur ipsi H B, ideoque G I, GL inter se æquales essent, totum, & pars, quod est absurdum. a 16. sec. conic.

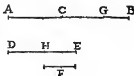
Cum ergo puncta I, A cadant in oppositas sectiones, iunctaque sit I A secans rectas CO, CD continentes angulum OCD, qui deinceps est angulo DCE sectionem AB continenti b erunt ex ipsa abscissæ lineæ M I, N A inter asymptotos, & sectiones interiectæ inter se æquales. Producantur FA, FB vsque ad asymptotos in D, E; agaturque ex I recta IO æquidistans ad CD. Cumque triangulorum I O M, N D A, bases I M, N A sint in directum constitutæ, sintque latera IO, ND; MO, AD inter se parallela, singula singulis, erunt quoque anguli ad I, & N; vti etiam ad M, & A inter se æquales; sed & bases I M, N A inter se sunt æquales, vt superiùs demonstratum fuit, quare, & reliqua latera M O, A D æqualia erunt. b ibidem.

Præterea cum sit linea BG æqualis HI, erunt quoque EG, CO inter se æquales (ob æquidistantiam linearum I O, HC, BE,) quibus addita communi GC in prima, secunda, & tertia figura, vel dempta in quinta, proueniet E C, æqualis ipsi GO, sed FD, E C sunt æquales (nam sunt latera opposita in parallelogrammo CF,) quare FD ipsi GO æqualis erit; si ergo ex his demantur æquales MO, A D; reliquæ G M, F A æquales erunt, at sunt quoque parallelæ, vnde GF, IA inter se æquidistabunt. Quod demonstrare oportebat.

LEMMA V. PROP. XVI.

Sint duæ rationes, AB nempe ad BC, & DE ad F maioris inæqualitatis, & sit ratio AB ad BC, minor ratione DE ad F. Oportet B C, ita secare in G, ita vt A G ad G C sit vt D E ad F.

Fiat EH æqualis F, & vt DH ad HE, ita AC ad CG, & punctum G erit quæsitum. Quoniam cum AC ad C G sit vt D H ad H E, erit componendo AG ad GC, vt DE ad EH, vel ad F. Quod faciendum erat.



Quod autem punctum G cadat infra B, patet. Nam ex hypotesi, A B ad B C habet minorem rationem quàm D E ad F, vel ad E H, quare diuidendo A C ad C B habebit minorem rationem, quàm DH ad H E, vel quàm eadem A C ad C G; ergo CB est maior CG; siue punctum G cadit infra B. Quod demonstrandum erat.

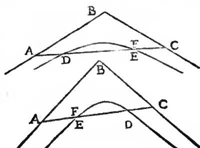
COROLL.

Hinc, data ratione maioris inæqualitatis, hoc eſt D E, ad E H, & differentia A C inter duos terminos ignotos A G, G C, qui debeant eſſe in data ratione, eruitur quomodo reperiantur ipſi termini A G, G C. Facta enim fuit vt D H differentia primorum, ad H E minorem terminum, ita data differentia A C, ad aliam C G, & reperti ſunt quæſiti termini A G, G C. Nam ſtatim oſtenſum fuit eſſe A G ad G C, vt D E ad E H.

THEOR. XII. PROP. XVII.

Si fuerit in angulo rectilineo quælibet applicata, à qua hinc inde ab eius termino æqualia ſegmenta ſint abſciſſa, & per vnum diuiſionis punctum deſcribatur Hyperbole, cuius aſymptoti ſint latera dati anguli, ipſa per alterum punctum neceſſariò tranſibit.

Sit in angulo A B C applicata quæcunque A C, quæ inæqualiter ſecetur in D, & ſumatur C E æqualis A D. Dico ſi per punctum D deſcribatur Hyperbole, cuius aſymptoti ſint B A, B C, ipſam omnino tranſire per E.



Quod huiuſmodi Hyperbole tranſiens per D, alibi ſecet applicatam A C, patet. Nam ſi eam contingeret in D, eſſet A C æqualiter [a] ſecta in D: quod eſt contra hypoteſim. Secet ergo in F; & erit F C [b] æqualis A D, ſed eſt quoque E C eidem A D æqualis, quare F C, E C æquales erunt; hoc eſt punctum F congruet cum ipſo E; quare Hyperbole D F, quæ in angulo aſymptotali A B C deſcribitur per D, omnino tranſit per E. Quod erat demonſtrandum.

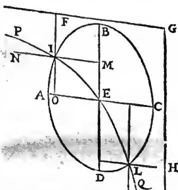
[a] 3. ſecundi conic.
[b] 8. ibid.

THEO-

THEOR. XIII. PROP. XVIII.

Si per centrum Ellipsis describatur Hyperbole, cuius asymptoti coniugatis diametris æquidistent; ipsa in duobus tantùm punctis Ellipsis peripheriam secabit.

Esto Ellipsis A B C D, cuius centrum E, & diametri coniugatæ sint A C, B D quibus ductæ sint F G, H G ipsis diametris altera alteri æquidistantes, & simul occurrentes in G; & cum asymptotis G F, G H, per centrum E, descripta sit Hyperbole I E L. Dico hanc, Ellipsis peripheriam in duobus tantùm punctis secare.

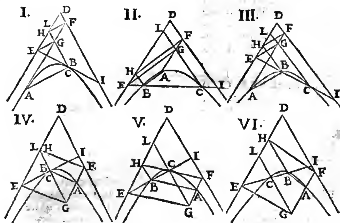


Nam cum in Hyperbola I E L sumptum sit punctum E, per quod ductæ sunt A E C, D E B asymptotis æquidistantes, ipsæ in puncto tantùm E sectioni occurrent, & Hyperbole in angulo B E A, inter E A, & G F semper incedet, pariterque in angulo C E D, inter E D, & G H; sed anguli B E A, C E D terminantur à peripherijs B A, C D, quare Hyperbole ex vtraque parte producta ipsas peripherias omninò secabit, vt in I, L. Si ergo ex I ducantur M I N, O I F diametris æquidistãtes, ob eandem rationem superiùs allatam sectio E I P, in nullo alio puncto, quàm I cum rectis N I M, F I O conueniet, sed ipsæ N I M, F I O nil aliud commune habent cum peripheria quadrantis A B, quàm idem punctum I, quare Hyperbole E I P in vno tantùm puncto I Ellipsis peripheriam secabit in quadrante A B. Cõsimili constructione, & argumento, ostendetur sectionem E L Q in alio puncto quàm L peripheriam D C non secare: quare huiusmodi Hyperbole in duobus tantùm punctis secat Ellipsis peripheriam. Quod erat demonstrandum.

THEO.

THEOR. XIV. PROP. XIX.

Si à puncto, quod est in angulo asymptotali, ductæ sint rectæ lineæ asymptotis æquidistantes, & Hyperbolæ occurrentes, atque ex vnius eductarum occursu agatur recta, quæ sectionem, vel in ipso tangens puncto, vel alibi secans, producta secet quoque eam asymptoton, cui altera eductarum æquidistat; recta linea iungens hoc idem punctum cum puncto contactus, vel interfectionis nouiter ductæ lineæ cum Hyperbola, æquidistabit rectæ, quę ab occursu eiusdem lineæ cum prædicta asymptoto ad datum punctum educitur.



SIt Hyperbole ABC, in cuius angulo asymptotali EDF sumptum sit quodlibet punctum G, vel extra Hyperbolen, vt in prima, secunda, & tertia; vel intra, vt in quarta, quinta, & sexta figura, à quo ductæ sint asymptotis æquidistantes GA, GC, sectioni occurrentes in A, C; & ex altero occursuum C ducta sit quæcunque alia CBE, quæ, vel sectionem contingat in C, vt in prima, & quarta figura, vel alibi secet in B, vt in reliquis, & producta conueniat cum asymptoto DE, quæ rectæ GA ęquidistat. Dico, si iungantur AB, EG ipsas inter se æquidistare.

Nam ducta BH parallela ad FD, productisque AG, CG vsque ad asymptotos in F, L; & EBC ad aliam asymptoton DF in I. Erit iuncta
a 13. h. AB iunctæ HF a parallela, est autem EB æqualis CI; quare, ob parallelas BH, CL; ID, erit quoque EH æqualis ipsi LD, siue ęqualis GF;

sed

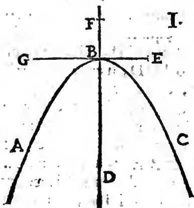
sed EH, GF sunt etiam parallelæ, ergo, & EG æquidistat HF, sed AB quoque ipsi HF æquidistat, vt modò ostendimus: quare AB, & EG sunt inter se parallelæ. Quod erat, &c.

PROBL. I. PROP. XX.

A dato puncto, ad datæ Parabolę peripheriam, MINIMAM rectam lineam ducere.

Sit data Parabole ABC, cuius axis BD, vertex B, rectum latus BE, & datum vbicunque punctum sit F. Oportet ex F ad peripheriam ABC, *MINIMAM* rectam lineam ducere.

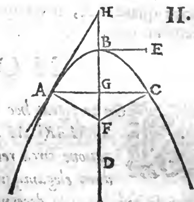
Esto primùm datum punctum F extra Parabolen in axe producto, vt in prima figura. Dico ipsam FB esse *MINIMAM*.



Nam cum BD sit axis Parabolæ, si ex B ducatur BG ordinatis æquidistans, ipsa cum FD rectos angulos efficiet, ac Parabolen [a] continget. Cum ergo BF perpendicularis sit contingenti BG, erit FB *MIMIMA* [b] omnium, quæ ex F ad peripheriam ABC educi possunt. Quod erat, &c.

Si verò datum punctum F, in secunda figura, fuerit in ipso axe BD intra Parabolen ABC, quod distet à vertice B, per interuallum non maius dimidio recti BE, idem axis segmentum FB erit *MINIMA* [c] recta quæsita.

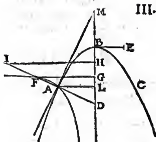
Si autem datum punctum F in eadem figura sit in axe BD, sed interuallum FB maius sit dimidio recti BE. Secetur FG æqualis eidem dimidio, & applicetur GA peripheriæ occurrens in A. Dico iunctam FA esse *MINIMAM* quæsitam.

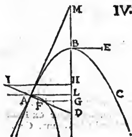


Ducta enim ex A [d] contingente AH, ipsa cum axe producta [e] conueniet in H; eritque HB ęqualis [f] BG, siue HG dupla GB, estque EB dupla GF, ex constructione, ergo HG ad GB est vt EB ad GF; ex quo rectangulum HGF æquabitur rectangulo EBG, siue [g] quadrato GA; quare angulus FAH rectus [h] erit. Cumque AF sit ex contactu A contingenti AH perpendicularis, & punctum F sit in axe, erit FA *MINIMA* [i] ducibilium ad Parabolæ peripheriam ABC. Quod, &c.

Si denique datum punctum F sit extra Parabolen ABC, vt in tertia figura, vel extra, vt in quarta, inter axem BD, & peripheriam BA; Applicetur ex recta FFG axi occurrens in G, dematurque de axe supra FG re-

[a] 32. primi conic.
[b] 10. h.
[c] 9. huius ad nu. h.
[d] 2. pr. h.
[e] 24. primi conic.
[f] 35. ibid.
[g] Coroll. pr. 1. h.
[h] 203. Sept. Pappi.
[i] 11. h. ad num. 1.





F G recta G H ęqualis dimidio recti B E, & ex H agatur H I parallela ad G F, & in angulo I H D per punctum F describatur [a] Hyperbole F A, quæ Parabolæ peripheriam in vno tantùm puncto A secabit, [b] & iungatur F A. Dico hàc esse *MINIMAM* quæsitam.

a 4. sec. conic.

b 12. h.

Applicetur A L, & ex A ducatur contingens A M, axi occurrens in M; producaturque F A ad vtranque partem, quæ cum asymptotis [c] conueniet in I, D, eruntq; in vtraque figura, interceptę A I, F D inter se ęquales, ac ideo H L, G D ęquales erunt, ob ęquidistantes lineas I H, A L, F G, in triangulo I H D; si ergo, in tertia figura, dematur communis L G, & in quarta, addatur, fient H G, L D inter se æquales; sed est G H dimidia B E, quare, & L D ipsius B E dimidia erit. Et quoniam quadratum A L æquatur rectangulo [d] L B E, & rectangulum L B E, æquale est rectangulo sub dupla L B, siue sub [e] M L, & sub dimidia B E, hoc est sub L D, ergo quadratum A L æquale erit rectangulo M L D, ac ideo angulus M A D rectus [f] erit, siue F A erit ex contactu A contingenti A M perpendicularis; quare F A, in vtraque figura, erit [g] *MINIMA* quæsita. Quod faciendum erat.

c 8. secūdi conic.

d Coroll. primæ 1. huius.

e 35. primi conic.

f 203. Sept. Pappi.

g 10. h. & 11. h. ad num. 1.

MONITVM.

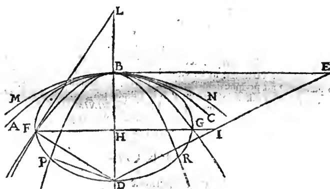
NOn te pigeat hoc loco, Lector humanissime, à suscepta MAXIMARVM, MINIMARVMQVE linearum inuestigatione circa reliquas coni-sectiones, aliquantisper recedere, dum elegantissimam quandam, ac vere admirabilem affectionem exhibere tibi decernimus, circa MINIMAS lineas, ad peripherias infinitarum Parabolarum, per eundem verticem simul adscriptarum, ex eodem communis axis puncto ducibiles, quarum vestigia, dum superius Problema prælo subijcitur, nescio qua parum morata cura insequi voluimus. Huius itaque itineris delineatio, est quæ consequitur.

THEO-

THEOR. XV. PROP. XXI.

Semita MINIMARVM linearum, ducibilium à puncto communis axis infinitarum Parabolarum, per eundem verticem simul adſcriptarum, ad earundem ſectionum peripherias, eſt circumferentia Ellipſis, cuius tranſuerſum latus ſit ipſum axis ſegmentum, inter aſſumptum punctum, & verticem interceptum: rectum verò eiuſdem tranſuerſi ſit duplum.

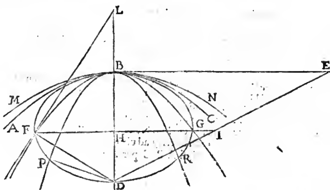
ESto Parabole ABC, cuius axis BD, in quo ſumptum ſit punctum D à vertice B diſtans per interuallum æquale dimidio ſui recti BE: patet ipſam DB eſſe [a] *MINIMAM* ad peripheriam ABC; & ſi aliæ Parabolæ concipiantur per B adſcriptæ, quarum recta latera excedant BE, conſtat ipſas cadere [b] extra, qualis eſt MBN, & eandem DB (quæ omnino erit minor dimidio ipſius recti lateris) ad eius peripheriam eſſe [c] *MINIMAM*. At ſi Parabolæ fuerint ipſi ABC per B verticem inſcriptæ, [a 9. huius ad nu. 1.] [b 2. Coroll. 19. pr. huius.] [c 9. huius ad nu. 1.]



patet etiam ipſarum latera minora [d] eſſe recto BE, ac ideo DB quorunlibet ipſorum laterum dimidium excedere, & *MINIMAS* ducibiles ex D, ad harum Parabolarum peripherias pertingere, præter ad verticem B. Si ergo quæratur, quàm delineent ſemitam harum *MINIMARVM* extrema puncta. Deſcribatur circa ſegmentum axis BD, tanquam circa tranſuerſum latus, Ellipſis BFDG, cuius rectum ſit ipſum BE. Conſtat hanc eſſe *MAXIMAM* Parabolæ ABC per B verticem [e] inſcriptibilem. Dico huius peripheriam BFDG prædictarum *MINIMARVM* eſſe tramitem. [d ex 2. Coroll. 19. pr. huius.] [e ex 20. pr. huius.]

Iungatur Ellipſis regula DE: & Parabolę ABC inſcribatur quælibet alia FBG, quæ Ellipſis peripheriam ad vtranq; partem omnino ſecabit, vt

a ibidem. in F, G (nam Parabole A B C est a *MINIMA* Ellipsi F B G circumscri-
b 2. primi huius. ptibilium) è quorum altero F ducta sit ordinata F H I communem axem in H, regulam verò secans in I; sitque F L Parabolen b contingens ad F,
c 24. primi conic. axemque secans c in L.



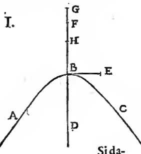
Iam, in triangulo E B D cum sit E B dupla B D, erit I H dupla H D, sed est quoque L H dupla H B, quare vt L H ad H B, ita I H ad H D:
d Coroll. primæ 1. huius. rectangulum ergo L H D æquale est rectangulo B H I, d siue quadrato F H, estque F H ipsi L D perpendicularis, quare angulus D F L rectus e est,
e 203. Sept. Pappi. & F L Parabolen contingit in F: vnde D F est f *MINIMA* ducibilium ex
f 11. huius ad nu. 1. dato puncto D ad peripheriam Parabolæ F B G. Consimili ratione ostendetur, quamlibet aliam inscriptam P B R Ellipsis peripheriam B F G D secare, vt in P, R, & iunctam D P, vel D R esse *MINIMAM*, &c. Quare semita *MINIMARVM* ex D ad huiusmodi Parabolarum peripherias, est prædictæ Ellipsis perimeter. Quod ostendere propositum fuit.

PROBL. II. PROP. XXII.

A dato puncto, ad datę Hyperbolæ peripheriam, *MINIMAM* rectam lineam ducere.

Sit data Hyperbole A B C, cuius axis B D, rectum B E transuersum verò B G, centrum H, & datum vbicunque sit punctum F. Oportet ex F ad Hyperbolæ peripheriam A B C *MINIMAM* rectam lineam ducere.

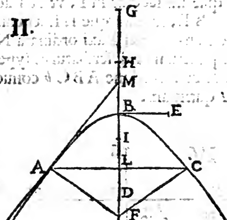
Si primò datum punctum F, in prima figura fuerit in axe producto, extra Hyperbolen, ipsa
g 10. h. F B erit g *MINIMA*.



Sida-

Si datum punctum F sit in axe intra sectionem, vt in secunda figura, quod tamen distet à vertice per interuallum non maius dimidio recti BE: item FB erit [a] *MINIMA*. [a] 9. huius ad nu. 1.

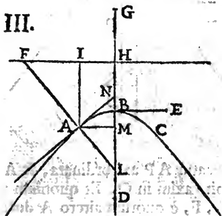
Cum verò, in eadem figura, segmentũ FB excedet prædictum recti dimidium: demptur BI æqualis semi-recto BE, & tunc habebit HB ad BI maiorem rationem quàm ad BF: si ergo HF secetur in L, ita vt HL ad LF, sit vt HB ad BI, punctum L omnino cadet inter B & F; itaque ducta ALC ordinatim axi applicata, iunctaq; FA. Dico ipsam FA esse *MINIMAM* quæsitam.



Ducta enim ex A [b] contingente AM, quæ axi occurret [c] in M. Erit rectangulum HLM ad quadratum LA, vt [d] transuersum latus ad rectum, vel vt GB ad BE; vel sumptis subduplis, vt HB ad BI; vel, ob constructionem, vt HL ad LF; vel, sumpta communi altitudine LM, vt idem rectangulum HLM ad rectangulum FLM: ergo quadratum LA æquabitur rectangulo FLM, sed est AL ipsi FM perpendicularis: quare angulus FAM [e] rectus erit, sed AM sectionem contingit in A: ergo FA est *MINIMA* ducibilium ex F ad Hyperbolæ [f] peripheriam ABC, est autem FC æqualis FA: vnde in hoc casu duę erunt *MINIMAE*, &c. [b] 2. pr. h. [c] 24. primi conic. [d] 37. ibid. [e] 203. Sept. Pappi. [f] 11. h. ad num. 1.

At si datum punctum F fuerit in axe coniugato HF, vt in tertia figura. Diuidatur FH in I, ita vt FI ad IH sit vt transuersum GB ad rectũ BE, & per I agatur IA axi æquidistans, quæ in vno tantùm puncto A Hyperbolæ [g] occurret. Dico iunctam FA esse *MINIMAM* quæsitam. [g] 26. primi conic.

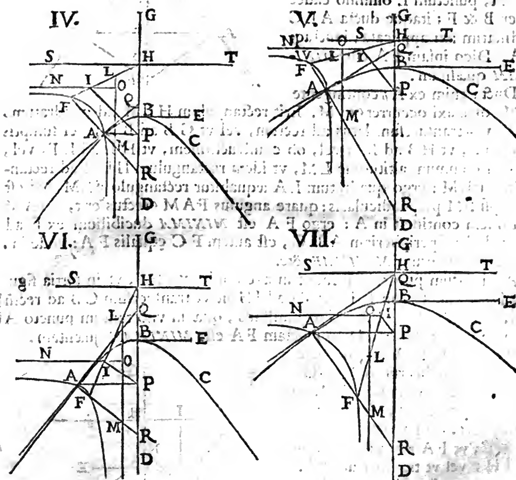
Producatur FA axi occurrens in L, cui applicetur AM, ducaturque ex A [h] contingens AN, quę axi occurret [i] in Q. Erit in triangulo FLH, ob parallelas, HM ad ad ML, vt FA ad AL, vel vt FI ad IH; vel vt transuersum ad rectum per constructionem; vel vt rectangulum HMN [l] ad quadratum MA, sed eadem HM ad ML, (sumpta communi altitudine MN) est vt idem rectangulum HMN ad rectangulum LMN; vnde quadratum MA, æquabitur rectangulo NML, & est AM ipsi LN perpendicularis: quare angulus LAN, & qui ei deinceps est FAN rectus [m] erit, sed AN sectionem contingit, ergo FA [n] est *MINIMA* quæsita. [h] 2. pr. h. [i] 24. primi conic. [l] 37. ibid. [m] 203. Sept. Pappi. [n] 10. h.



Si autem datum punctum F sit extra Hyperbolen inter axem coniugatum SHT, & sectionis peripheriam, vt in quarta, & quinta figura, vel

intra Hyperbolen, inter axem, & peripheriam, vt in sexta, & septima (nam si esset in ipsa peripheria, vt in A, tunc *MINIMA* abiret in punctum.) Iungatur H, centrum Hyperbolæ, cum dato puncto F recta linea HF, quæ ita secetur in I, vt HI ad IF sit vt transuersum latus GB ad rectum BE, sumaturque HL æqualis FI, & per L agatur LM axi BD æquidistans, ac per I axi ordinata NIO, & in angulo NOM per datum in eo punctum A describatur [a] Hyperbole FA, quæ in vno tantùm punctum A cum sectione ABC [b] conueniet. Dico iunctam FA esse *MINIMAM* quæsitam.

a 4. secundi conic.
b 12. h.



Ducatur AP axi ordinata, & AQ Hyperbolen contingens [c] in A, quę secabit [d] axim in Q. Et quoniam in Hyperbola AF sumpta sunt duo puncta A, F, è quorum altero A ducta est AP alteri asymptoto NO æquidistans, ex altero verò F, recta FILH vtranque asymptoton secans in I, L; estque LH in directum, & æqualis posita ipsi IF, & ex H recta HBP alteri asymptoto OM æquidistans, cum alia AP conueniens in P, erit iuncta IP [e] parallela ad FA; sed HP secat IP alteram parallelarum, quare producta secabit quoque reliquam HF: secet igitur in R. Erit ergo in triangulo HFR (ob parallelas) HP ad PR, vt HI ad IF, vel vt trans-

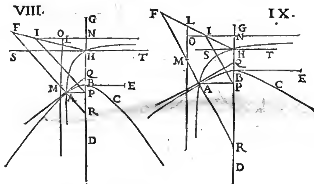
c 2. pr. h.
d 24. primi conic.
e 14. h.

transuersum latus ad rectum, per constructionem, [a] vel vt rectangulum HPQ ad quadratum PA; sed eadem HP ad PR (sumpta communi altitudine PQ) est vt idem rectangulum HPQ ad rectangulum RPQ, quare quadratum PA æquabitur rectangulo RPQ, estque AP ipsi RQ perpendicularis, vnde angulus RAQ, & in quarta, & quinta figura, qui ei deinceps QAF [b] rectus erit, sed AQ sectionem contingit, quare perpendicularis FA [c] erit *MINIMA* quæsita.

a 37. primi conic. *b 203. Sept. Pappi.* *c 10. et 11. huius ad num. 1.*

Si denique datum punctum F sit extra Hyperbolen, sed supra axem coniugatum HS, vt in octaua, & nona figura: A centro H datæ Hyperbolæ ad datum punctum F ducatur HF, quæ ita secetur in I, ita vt HI ad IF, sit vt transuersum latus GB ad rectum BE, sumptaque HL æquali ipsi IF, per L agatur ION ordinatim ductis æquidistans, & per L recta LOM axi HBD parallela, & in angulo NOM per datum punctum H (quod est centrum Hyperbolæ) describatur [d] alia Hyperbole HA, quæ alteram ABC in vno tantum [e] puncto A secabit. Dico iunctam FA esse *MINIMAM* quæsitam.

d 4. secundi conic. *e 12. h.*



Sit AP axi ordinatim applicata, & AQ ex A sectionem [f] contingens, axemque secans [g] in Q, iungaturque IP. Iam in Hyperbola AH, cuius asymptoti ON, OM, sumptum est punctum P, à quo ductæ sunt PA, PH asymptotis æquidistantes, & Hyperbolæ occurrentes in A, H, & ab eorum altero H ducta est HLI vtranque asymptoton secans in I, L, estque IF in directum, & æqualis posita ipsi HL, rectaque FA coniungit extremum F cum altero datorum A; ipsa FA [h] æquidistabit iungenti IP; sed HP secat IP quare producta secabit quoque alteram parallelarum FA, si hæc vltra FA producatur. Sit ergo harum occursus R. Erit in triangulo FHR recta HP ad PR, vt HI ad IF, vel vt latus transuersum ad rectum, ex constructione, vel [i] vt rectangulum HPQ ad quadratum PA, sed eadem HP ad PR (sumpta communi altitudine PQ) est vt idem rectangulum HPQ ad rectangulum RPQ: quare quadratum PA,

f 2. pr. h. *g 24. primi conic.* *h 15. h.* *i 37. primi conic.*

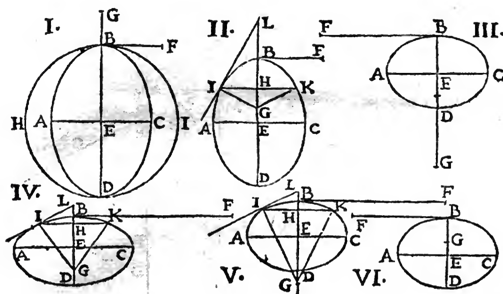
P A, & rectangulum R P Q inter se sunt æqualia, sed est A P ipsi Q R
a 203. Sept. Pappi, perpendicularis, ergo angulus Q A R rectus [a] erit, pariterque is qui ei de-
b 10. h. inceps Q A F. Quare perpendicularis F A [b] erit *MINIMA* quæsita, Quod faciendum erat.

PROBL. III. PROP. XXIII.

A dato puncto, ad datæ Ellipsis peripheriam, MAXIMAM, & MINIMAM rectam lineam ducere.

Sit data Ellipsis A B C D, cuius centrum E, axis minor A C, maior B D, rectum latus B F, & datum punctum sit G. Oportet ex G, ad peripheriam A B C, *MAXIMAM*, & *MINIMAM* rectam lineam ducere.

1. Si primò datum punctum congruit cum centro E; duo maiores semi-axes E B, E D, erunt *MAXIMAE*, duo verò semi-axes minores E A,
c 86. primi huius. E C [c] erunt *MINIMAE*.



2. Si datum punctum fuerit in vertice B maioris axis; ipsæ maior axis BD erit *MAXIMA* ducibilium ex B, &c. Nam si concipiatur descriptus circulus B H D I ex radio E B, hoc est circa diametrum B D, eius peri-
d ex 26. pr. huius. pheria cadet tota extra [d] peripheriam Ellipsis A B C D; & cum B D sit *MAXIMA* ad peripheriam circuli, eò ampliùs erit *MAXIMA* ad inscriptam Ellipsis peripheriam. Verùm non dabitur *MINIMA* ex B, cum ipsa in punctum abeat,

3. Si autem datum punctum G in eadem prima figura fuerit in axe maiori, extra tamen Ellipsim: tota G D erit *MAXIMA*; est enim *MAXIMA* ad peripheriam circuli B H D I, cum in ea sit centrum, ergo ad periphe-
e 10. h. riam inscriptæ Ellipsis omnino *MAXIMA* erit. G B verò erit [e] *MINIMA*, cum ipsa G B sit extra Ellipsim perpendicularis ad rectum BF, quod ad B contingit Ellipsim.

Si verò,

4. Si verò, in secunda figura, datum punctum G fuerit in maiori semi-axe, at distet à vertice B per interuallum G B non maius dimidio recti B F, ipsa G D, in qua centrum, erit *MAXIMA*, [a] & reliqua G B *MINIMA*. a 9. huius ad nu. 1. 2.

5. At si in eadem figura datum punctum G item fuerit, in maiori semi-axe E B, sed distet à vertice B per interuallum maius dimidio recti B F (nam semi-axis maior E B, est semper maior semi-recto B F, cum totus axis B D sit maior toto recto B F) *MAXIMA* erit [b] G D, in qua centrum: b 6. huius.
MINIMA verò venabitur sic.

Cùm sit B G maior semi-recto B F, habebit E B ad B G minorem rationem, quàm E B ad semi-rectum B F, vel sumptis duplis, quàm transuersum D B ad rectum B F, suntque hæ rationes maioris inæqualitatis: Itaque diuidatur [c] B G in H, ita vt E H ad H G sit vt D B ad B F, & per c 16. h.
H applicetur I H K, & iungantur G I, G K: nam ipsæ, quæ sunt æquales, erunt *MINIMAE*.

Quoniam ducta I L contingente, hæc axi occurret [d] in L: & cum sit d 25. primi conic.
E H ad H G, vt transuersum D B ad rectum B F, sumpta communi altitudine H L, erit rectangulum E H L ad G H L, vt transuersum ad rectum, sed est quoque rectangulum E H L ad quadratum H I, [e] vt transuersum e 37. ibid.
ad rectum, ergo rectangulum E H L ad G H L, est vt idem E H L ad quadratum H I, quare rectangulum G H L æquale est quadrato H I: estque H I ipsi G L perpendicularis, ergo angulus G I L rectus erit, & I L sectionem contingit in I, à quo ducta est I G perpendicularis, & maiori axi occurrens, quapropter G I erit [f] *MINIMA*, estque G K æqualis G I. Vnde in hoc casu duæ erunt *MINIMAE*, & vna tantùm *MAXIMA*. f 11. h.

6. Si verò datum punctum G fuerit in axe minori, vt in tertia figura, & distantia G B sit non minor dimidio recti lateris B F: (quæ G B omnino maior erit semi-axe B E, vt ad finem 9. huius monuimus) tunc ipsa G B erit *MAXIMA*, [g] & G D *MINIMA*, vel punctum G cadat infra D; vel supra inter D, & E. Nam si caderet in ipso puncto D (dummodo D B sit vt ponitur, nempe non minor dimidio recti) ipsa D B esset *MAXIMA*, nec daretur *MINIMA*, cum hæc in punctum euanescat. g 9. huius ad num. 3.

7. Verùm, si datum punctum G sit in axe minori, sed distet à vertice B per interuallum minus dimidio recti B F, & cadat infra centrum E, vel inter E, & D; vt in quarta figura, aut infra D, vt in quinta. Cum sit G B minor semi-recto, & E B æqualis semi-transuerso B D, habebit G B ad B E minorem rationem, quàm semi-rectum ad semi-transuersum, vel quàm rectum F B ad transuersum B D. Diuidatur ergo B E in H, ita vt G H ad H E, [h] sit vt rectum F B ad B D transuersum, & per H agatur ordinata H I, & I L sectionem contingens, & axi occurrens in L, iungaturque G I. Dico G I esse *MAXIMAM*. h 16. h.

Cum sit enim G H ad H E, vt F B ad B D, sumpta communi altitudine H L erit rectangulum G H L ad E H L, vt F B ad B D, vel vt [i] quadratum G I H ad idem rectangulum E H L, quare rectangulum G H L æquale est quadrato G I H, estque H I perpendicularis ad G L; ergo angulus G I L rectus erit, estque I L sectionem contingens in L, à quo ducta est I G perpendicularis, & minori axi in G, occurrens, quare ipsa G I [l] erit *MAXIMA*, & est G K æqualis G I: ergo ex G duæ erunt *MAXIMAE*. *MI-NIMA* i 37. primi conic. l 11. h.

a 9. huius ad num. 4. *NIMA* verò in hoc casu, tum in quarta, tum in quinta figura est a ipsa GD; nisi punctum G cadat in ipso D; tunc enim *MINIMA* abit in punctum.

8. At, si, vt in sexta figura, quando interuallum G B minus est dimidio B E, punctum G cadat inter B, & E, tunc si concipiatur D esse Ellipsis verticem, reliquum interuallum D G, vel erit non minus, vel minus dimidio B F, quo in casu duæ *MAXIMAE* reperientur ad partem peripheriæ A D C: eadem constructione, & demonstratione, ac ad num. 6. & 7. huius, & reliqua G B erit *MINIMA*, &c.

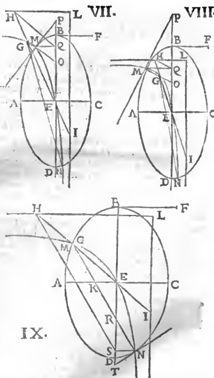
9. Si denique datum punctum G fuerit inter semiaxes, aut extra sectionẽ, vt in septima figura; vel intrà, vt in octaua; vel in ipsa sectione, vt in nona. Iungatur E G, quæ hinc inde producatur, & fiat, vt transuersum D B ad rectum B F, b ita E H ad H G, ac ita G I ad I E, & ex H, I, ducantur H L, minori axi A C, & I L maiori D B parallelę, quę simul occurrent in L, & in angulo H L I per punctum E (quod est centrum Ellipsis.) describatur c Hyperbole M G E N, quæ necessariò d transibit per G (cum segmenta G H, E I rectæ H I applicatæ in angulo asymptotali H L I, sint ęqualia,) & in duobus tantùm punctis M, N, Ellipsis peripheriam, e secabit. Dico has interfectiones dare puncta quæsita: hoc est iunctam G N in septima, octaua, & nona figura esse *MAXIMAM*, & G M *MINIMAM*, in septima, & octaua figura, tantùm, quoniam in nona ipsa *MINIMA* abit in punctum.

b Coroll. 16. h.

c 4. secundi conic.

d 17. h.

e 18. h.



Quò autem ad *MINIMAM* ostendendam. Ducatur ex M, Ellipsim contingens M P maiori axi occurrens f in P; applicetur que M Q. Et quoniam in angulo asymptotali H L I sumptum est punctum Q, extra

f 25. primi conic.

tra sectionem, à quo ductæ sunt QM, QE asymptotis parallelæ, & Hyperbolæ occurrentes in M, E, & ab altero occursuum E, ducta est EGH, secans Hyperbolen in G, & asymptoton HL in H, erunt iunctæ HQ, MGO [a] inter se parallelæ; quare in triangulo QEH, recta GM, quæ basi HQ æquidistat, producta conueniet cum latere EQ, vt in O; eritque EQ ad QO, vt EH ad HG, hoc est vt transuersum AB ad rectum BF, sed EQ ad QO, sumpta communi altitudine QP, est vt rectangulum EQP ad rectangulum OQP, ergo rectangulum EQP ad OQP erit vt transuersum ad rectum, vel vt [b] idem rectangulum EQP ad quadratum QM; vnde rectangulum OQP, æquale est quadrato QM, estque QM ipsi OP perpendicularis, ergo angulus OMP [c] rectus est, & in septima figura, qui ei deinceps est GMP rectus erit, sed est GM extra sectionem, contingenti MP perpendicularis: quare GM erit [d] *MINIMA*. At, in octaua figura, MP Ellipsim contingit, & ei perpendicularis MG est intra Ellipsim, sed non excedit interceptam MO inter contactum, & maiorem axim, quare GM erit [e] *MINIMA*.

a 19. h.

b 37. primi conic.

c 203. Sept. Pappi.

d 10. h.

e 11. h. ad num. 1.

Quod tandem in quouis prædictorum schematum, ducta GN sit *MAXIMA*, ita ostendetur, sed in nona tantùm figura, ne in reliquis noua linearum, & characterum appositio confusionem pariat.

Secet ergo GN semi-axim minorem AE in K, & maiorem ED in R, applicetur NS, contingens agatur NT, iungaturque SH.

Et cum à puncto S, & in angulo asymptotali HLI intra sectionem ductæ sint SE, SN asymptotis parallelæ, Hyperbolæ occurrentes in E, N, & ab altero occursuum E ducta sit EGH, Hyperbolen secans in G, & asymptoton in H, erunt iunctæ SH, NRG [f] inter se parallelæ; quare in triangulo HES, erit ES ad SR, vt EH ad HG, vel vt transuersum DB [g] ad rectum BF, vel vt rectangulum EST ad quadratum SN, sed ES ad SR, est vt idem rectangulum EST ad rectangulum RST, ergo quadratum SN æquale est rectangulo RST, ex quo angulus RNT rectus erit, sed TN Ellipsim contingit in N, estque NG maior intercepta NK inter contactum, & minorem axim, quare GN omnino erit [h] *MAXIMA* quæsita. Quod erat faciendum.

f 19. h.

g 37. primi conic.

h 11. h. ad num. 2.

MONITVM.



E inuentione MAXIMARVM à puncto dato ad vniuersam Parabolæ, vel Hyperbolæ peripheriam hactenus nihil egimus, cum manifestè pateat ad eas educi minimè posse lineas tantæ longitudinis, quin ipsis maiores, & maiores adhuc in infinitum reperiantur; eò quod sectiones ipsæ sint infinitæ extensionis: itaque consultò de hac re demonstrationem omisimus, cum hæc in promptu satis sit. Verùm si quærantur MAXIMAE, ducibiles à puncto extra sectionem dato, ad conuexas tantum quarumlibet coni-sectionum peripherias: si punctum fuerit in axe producto, ex eo ductæ lineæ contingentes æquales erunt, & MAXIMAE ad ipsius sectionis conuexam peripheriam. Si autem punctum fuerit extra axim Parabolæ, vel Hyperbolæ, sed intra angulum ab asymptotis

E *factum,*

factum, tunc ex dictis binis contingentibus, quæ ad partem axis ducitur semper altera contingente ad oppositam axis partem minor erit, atq; hæc erit MAXIMA. Si verò punctum fuerit extra Ellipsim inter axes, tunc contingens ad partem maioris axis ducta, minor erit altera contingente ad partem minoris, pariterque hæc erit MAXIMA ad conuexam Ellipsis peripheriã. Quæ omnia facili negotio demonstrabuntur si animaduertatur, quod in quocunque triangulo, cuius vnum latus altero sit maius, hoc ipsum esse MAXIMAM linearum omnium à vertice anguli ab ipsis lateribus comprehensi, ad puncta basis prædicti trianguli ducibilium, (tale enim triangulum est, quod à prædictis contingentibus tanquam lateribus, & à recta puncta contactuum iungente, tanquam basi efficitur, in quo idem maius latus, siue contingentium maior eò magis erit MAXIMA ad inclusam sectionis peripheriam.) Si tandem punctum fuerit in angulo ad verticem asymptotalis, aut in asymptotis eum comprehendentibus, tunc vllam contingentium ducere impossibile est, & ducibiles lineæ ad conuexam Hyperbolæ peripheriam semper augentur, ideoque non datur MAXIMA; & cum est in altero angulorum, qui deinceps sunt asymptotali, vel in ipsis asymptotis Hyperbolen continentibus, tunc vnica tantum contingens linea ab eo duci potest, & hæc ad partem axis, quæ erit MAXIMA ad eandem partem ducibilium; sed ad oppositam, ipsæ ducibiles ad Hyperbolæ conuexam peripheriam perpetuò pariter augentur. Sed in re haud difficilis inuestigationis ne amplius quæso immoremur.

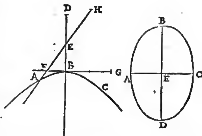
THEOR. XVI. PROP. XXIV.

Transuersorũ laterũ in Hyperbola, MINIMVM est axis; in Ellipsi autẽ, MAXIMVM est axis maior, MINIMVM verò axis minor.

Sit Hyperbole A B C, cuius axis transuersus D B, centrum E. Dico D B omnium transuersorum esse *MINIMVM*.

Sit quodcunque aliud H E A, & per B axi applicetur G B F, quę axi perpendicularis erit, ac sectionem continget in B. Erit ergo perpendicularis E B *MINIMA* ad [a] peripheriam A B C: quare E B minor erit E A, & duplum D B maius duplo H A: ex quo D B erit transuersorum *MINIMVM*.

a 10. h.



In Ellipsi verò A B C, cuius centrum E, & B D sit axis maior, & A C minor: patet B D esse transuersorum *MAXIMVM*, & A C *MINIMVM*, ex primo Coroll. 86. primi huius. Quod erat, &c.

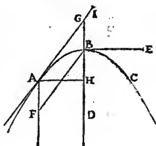
THEO-

THEOR. XVII. PROP. XXV.

Rectorum laterum in Parabola, MINIMVM est rectum axis.

ESto Parabole A B C, cuius axis B D, rectum B E. Dico ipsum BE reliquorum rectorum esse *MINIMVM*. Sit quælibet alia diameter A F, quæ axi B D [a] æquidistabit, sitque ad A contingens A G, & B F ipsi A G æquidistans, quæ diametro A F erit ordinatim applicata; tandem axi applicetur A H, sumaturque A I æqualis recto diametri A F. [a] ex 46. pr. conic.

Iam, ob contingentem A G, cum sit H B æqualis B G, & F A eidem B G æqualis, erit H B æqualis F A: rectangulum ergo H B E ad F A I, vel quadratum [b] H A, ad quadratum B F, vel ad quadratum G A, erit vt B E ad A I, sed est quadratum A H minus quadrato A G, siue recta A H minor recta A G, cum acutus angulus A G B minor sit recto A H G, quare B E rectum, minus erit recto A I: eademque ratione demonstrabitur B E quocunque alio recto minus esse: quare B E rectum axis, est *MINIMVM*. Quod erat ostendendum. [b] Coroll. primæ 1. huius.



COROLL.

HInc patet, data quacunque Parabolæ diametro, si quæratur ratio inter eius rectum, rectumque axis, hanc ipsam reperiri inter quadratum contingentis interceptæ, à vertice datæ diametri vsque ad axim, & quadratum axi semi-applicatæ ab eodem vertice.

Verùm si omnium rectorum continuam proportionem, in lineis, & veluti ipsorum quandam propagationem ante oculos ponere expetemus, id à proximo Theoremate addiscere liceat.

THEOR. XIIX. PROP. XXVI.

Recta latera diametrorum in Parabola, sunt inter se in ratione linearum ex puncto axis remoto à vertice per quadrantem sui recti, ad ipsarum diametrorum vertices eductarum.

ESto Parabole ABC, cuius axis BD rectum BI, ac eius quarta pars sit BD, & quælibet aliæ diametri sint AE, FG, &c. quarum vertices iungantur rectis DB, DA, DF, &c. Dico, tùm axis, tùm prædictorum diametrorum latera esse inter se, vt sunt ipsæ eductæ DB, DA, DF, &c.

 Eri-

[a] 88. primi huius. [b] 90. primi huius. [c] 35. primi conic.

Erigatur ex A contingenti A G perpendicularis A L, quæ axi [a] occurret in L, cui applicata A H, erit intercepta L H [b] æqualis dimidio recti B I, hoc est dupla interuallo D B, (cum punctum D distet à vertice B per quartam recti lateris partem ex hypotesi) & H G dupla [c] est quoq; G B, quare, & tota L G dupla est tota G D, siue L D æqualis D G, estque angulus L A G rectus, quare si cum centro D, interuallo G, vel L circulus describatur, ipse omnino transibit per A; vnde D A item æqualis erit ipsis D G, D L, siue L G erit dupla D A. Et cum rectum axis B D, ad rectum diametri A E, sit vt quadratum [d] A H ad A G, vel ob triangulorum similitudinem, vt quadratum A L ad L G, vel vt recta H L ad rectam L G (cum L A sit media proportionalis inter G L, L H) sumptis harum subduplis, erit rectũ axis ad rectum diametri A E, vt D B dimidium H L ad D A dimidium L G. Quod erat demonstrandum. Vocatur autem punctum D, focus Parabolæ.

[d] Coroll. 24. huius.

COROLL. I.

HInc cõstat, omnes eductas à foco ad Parabolę peripheriam, ęquari quartæ parti rectorum, earum diametrorum, quarum vertices sint termini, quibus ipsæ eductæ sectioni occurrunt: rectum enim axis B D ad rectum diametri A E, est vt D B ad D A, estque D B quarta pars recti B I, quare, & D A erit quarta pars recti lateris diametri A E, & D F quadrans recti, diametri F R. Vnde quò diametri ab axe remotiores fuerint, eò ipsarum recta maiora erunt; nam est D F maior D A, &c.

COROLL. II.

PAtet etiam, quamlibet eductam ex foco, ęquari aggregato ex interuallo foci ab axis vertice, & segmento axis inter verticem, & applicatam ex occursu eductæ cum sectione. Ostensa est enim D A æqualis D G, quæ æqualis est aggregato G B, cum B D, vel H B cum B D.

SCHOLIVM.

CVm demonstratum sit D G æqualem esse D A, erit angulus D G A, vel parallelarum externus E A M, æqualis angulo D A G, sed M A G Parabolen contingit in A, quare ex Opticæ legibus, si E A fuerit radius [e] incidens ad concauam peripheriam A B C, ipse A D erit reflexus, atque omnes radij axi Parabolę æquidistantes in punctum D coibunt; vnde si ipsi fuerint sonori, aut lucidi, simulque calidi, ibi sonus, aut lux,

[e] Breuiùs, & clariùs quàm à Vitellione in 41. 9.

aut lux, & calor, augebitur: & si à Solis corpore directè emanantes, ibi fiet incensio, à qua punctum D foci nomen ademptum fuit.

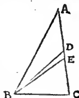
Si autem incidentes radij axi paralleli RF, OA à quadam recta NP axi ordinatim ducta secentur, erunt aggregata incidentium cum earum reflexis, simul æqualia.

Nam cum AD, ex præcedenti Coroll. 2. sit æqualis aggregato HB, cum BD, additis hinc inde æqualibus AO, HP, proueniet aggregatum OA, AD, æquale aggregato PB cum BD, itemque aggregatum RF, cum FD ostendetur æquale eidem aggregato PB cum BD, quare aggregata OAD, RFD æqualia erunt; quod acutissimè quidem à perspicacissimo Caualerio, in eius Speculo Vstorio animaduersum fuit.

LEMMA VI. PROP. XXVII.

Si in triangulo ABC, latus AC, ita sectum fuerit in D, vt rectangulum ACD æquale sit quadrato basis BC. Dico, iuncta BD, angulum ABC æqualem esse angulo BDC: si verò ACD rectangulum maius fuerit prædicto quadrato, & angulus angulo maior erit: & è contra.

Nam cum fuerit rectangulum ACD æquale quadrato CB, erit AC ad CB, vt BC ad CD, quare triangula ABC, BDC, ad communem angulum A constituta, similia erunt, ob idque angulus ABC æqualis angulo BDC.



At cum rectangulum ACD maius fuerit quadrato CB, facto rectangulo ACE æquali quadrato CB, erit CE minor CD, ergo iuncta BE, erit angulus ABC, æqualis angulo BEC, sed BEC maior est angulo BDC, quare ABC omninò maior erit angulo BDC.

Si tandem rectangulum ACD minus fuerit quadrato CB, non absimili modo ostendetur angulum ABC minorem esse angulo ADC. Quod vltimò erat, &c.

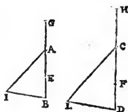
LEMMA VII. PROP. XXVIII.

Si duæ rectæ lineæ AB, CD proportionaliter sectæ fuerint in E, F, & homologis segmentis AE, CF æqualia sumantur AG, CH, & super AB, CD descripta sint similia triangula IAB, LCD. Dico vt rectangulum GBE, ad quadratum BI, ita esse rectangulum HDF ad quadratum DL.

Cum sit enim AE ad EB, vt CF ad FD, erit conuertendo, & componendo BA ad AE, vt DC ad CF, vel quadratum BA ad AE,

vt qua-

vt quadratum D C ad C F, & per conuersionem rationis, quadratum A B ad rectangulum G B E, vt quadratum C D ad rectangulum H D F, & conuertendo, rectangulum G B E ad quadratum A B, vt rectangulum H D F ad quadratum C D, & quadratum A B ad B I, est vt quadratum C D ad D L, ob triangulorum I A B, L C D similitudinem; quare ex æquo rectangulum G B E ad quadratum B I, erit vt rectangulum H D F ad quadratum D L. Quod erat, &c.



LEMMA VIII. PROP. XXIX.

Si quatuor magnitudinum eiusdem generis, prima A ad secundam B maiorem habuerit rationem, quàm tertia C ad quartam D E, sitque prima minor tertia, erit secunda minor quarta.

Fiat, vt A ad B, ita C ad D F, & cum A ad B habeat maiorem rationem, quàm C ad D E, habebit quoque C ad D F maiorem quàm ad D E, vnde D F erit minor D E, & est A ad B, vt C ad D F, erit permutando A ad C, vt B ad D F, estque A minor C, ergo B erit minor D F, & D F ostensa est minor D E, quare B eò ampliùs erit minor D E. Quod erat, &c.



THEOR. XIX. PROP. XXX.

Rectorum laterum in Hyperbola, cuius axis transuersus non sit minor eius recto latere, MINIMVM est rectum axis.

Esto Hyperbole A B C, cuius centrum D, axis transuersus E B, qui primò sit minor recto B F. Dico rectum B F esse rectorum laterum *MINIMVM*.

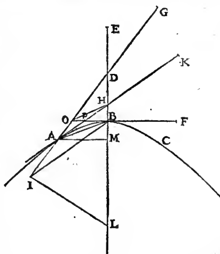
Sit quæcunque alia transuersa diameter G D A, in sectione producta ad I, cuius rectum sit A K ex A contingenter applicatum, & axi occurrens in H; & sit B I æquidistans A H, quæ ad diametrum G A I erit ordinatim ducta, atque ex I sit I L ipsi D I perpendicularis, ex A verò A M axi applicata, cui ex vertice B sit parallela, vel contingens B O, secans A H in P, iunganturque A B, O H.

a 25. primi conic. Iam cum rectangulum D M H ad quadratum M A, sit[a] vt E B ad B F, sitque E B maior B F, erit rectangulum D M H maius quadrato M A, quare

quare angulus D A M, siue in simili triangulo D L I, angulus D L I erit maior * angulo A H M, siue angulo parallelarum externo I B L: cum igitur in triangulo I B L sit angulus I B L minor I L B, erit latus I L minus latere I B. * 27. h.

Præterea, cum triangula A P O, B P H a sint æqualia, addito communi triangulo A P B, erunt triangula A O B, A H B super eadem basi A B inter se equalia, quare O H æquidistabit A B, ideoque vt D O ad O A, vel D B ad B M, ita D H ad H B, vel D A ad A I. Sunt ergo D M, D I proportionaliter sectæ in B, A, quibus additæ sunt D E, D G, æquales ipsis D B, D A, vtraq; vtrique, suntq; rectangula triãgula D M A, D I L similia, inter se, quare recta ngulum E M B ad quadratũ M A, b siue E B ad B F, est vt c rectãgulum G I A ad quadratum I L, cumque sit I L minor I B, erit quadratum I L minus quadrato I B, ideoque rectangulum G I A ad quadratum I L, hoc est transuersum E B ad rectum B F, habebit maiorem rationem, quàm rectangulum G I A ad quadratum I B, vel quàm d transuersum G A ad rectum A K; ergo prima E B, ad secundam B F, maiorem habet rationem quàm tertia G A ad quartam A K, sed est prima E B minor e tertia G A, ergo, & secunda B F erit f minor quarta A K; & sic de reliquis diametrorum rectis lateribus: quare B F, rectum axis transuersi, est *MINIMVM*, &c.

a 1. tertij conic.



b 21. primi conic.
c 28. h.
d 21 primi conic.
e 24. h.
f 29. h.

Si autem axis E B æqualis fuerit eius recto B F; cum demonstratum sit rectangulum G I A ad quadratum I L esse vt transuersus axis E B ad rectum B F; patet rectangulum quoque G I A æquari quadrato I L, sed quando E B æquatur B F, rectangulum etiam D M H æquatur g quadrato M A, & tunc angulus D A M, equalis est h angulo A H M, ergo etiam angulus D L I æquabitur angulo I B L, hoc est linea I B æqualis erit I L, sed erat rectangulum G I A æquale quadrato I L, ergo idem rectangulum G I A æquabitur quadrato I B, siue transuersa diameter A G, eius recto A K æqualis erit, & hoc semper, quæcunque sit ducta transuersa diameter præter axim.

g 37. primi conic.
h 27. h.

Cum ergo Hyperbole fuerit rectangula æquilatera, ad aliam quoque diametri applicationem æquilatera erit, sed axis est transuersorum i *MINIMVM*: ergo in Hyperbola, cuius axis transuersus eius rectum adæquet, rectum axis aliorum rectorum est *MINIMVM*. Quod erat, &c.

i 24. h.

SCHO-

SCHOLIVM.

CVm fuerit axis E B minor suo recto B F, ijsdem rationibus ostendetur rectangulum D M H minus esse quadrato M A, & angulum D A M, siue D L I minorem esse angulo A H M, siue angulo I B L, ac propterea latus I L maius esse latere I B, ideoque rectangulum G I A ad quadratum I L, siue transuersum axem E B ad rectum B F, minorem habere rationem, quàm idem rectangulum G I A ad quadratum I B, vel quàm transuersa G A ad rectum A K.

COROLL.

EX his patet, in Hyperbola, cuius axis transuersus sit maior recto, maiorem esse rationem axis ad proprium rectum, quàm cuiuslibet aliæ trãsuersæ diametri ad proprium rectum.

Et si axis, suo recto æqualis fuerit, axem ad proprium rectum eandem rationem habere, quàm quęlibet alia transuersa ad proprium rectum, ob ęqualitatem.

Si denique axis suo recto fuerit minor, minorem esse rationem inter axem, ac proprium rectum, quàm inter quamcunque aliam diametrum propriumq; rectum. Sed hæc sunt præter institutum nostrum, & fusim à præclarissimo Mydorgio pertractata.

Hinc, humanum esse errare deprehenditur, cum propositio 70. de Hyperbola Gregorij à Sancto Vincentio, contrarium his falsò concludat ex præcedenti 69. in qua (pace tanti Viri dictum sit) nescio quo fato hallucinatus est.

LEMMA IX. PROP. XXXI.

Si quatuor magnitudinum, prima A ad secundam B minorem habuerit rationem, quàm tertia C D ad quartam E, sitque prima maior secunda, erit tertia maior quarta.

FIat enim vt A ad B, ita C F ad E; cum ergo A ad B minorem habeat rationem quàm C D ad E, habebit quoque C F ad E, minorem quàm C D ad E; quare C F erit minor C D. Et cum sit A ad B vt C F ad E, dataque sit A, maior B, erit C F maior E, & eò magis C D maior eadem E. Quod erat, &c.

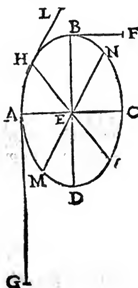


THEO-

THEOR. XX. PROP. XXXII.

Rectorum laterum in Ellipsi MAXIMVM est rectum minoris axis, MINIMVM verò rectum maioris.

ESto Ellipsis A B C D, cuius centrum E, axis minor A C, rectum A G, & axis maior B D, rectum B F. Dico A G rectorum omnium esse *MAXIMVM*; B F verò *MINIMVM*.



Sit enim quælibet alia transuersa diameter H I, cuius rectum H L, sitque diameter M N ipsi H I coniugata, quæ media proportionalis erit inter I H, & H L; vnde quadratum ipsius M N æquabitur rectangulo I H L, vti etiam quadratum A C æquatur rectangulo D B F, & quadratum B D rectangulo C A G; sed est quadratum A C, minus quadrato M N, cum sit transuersa A C minor [a] transuersa M N, ergo rectangulum D B F minus erit rectangulo I H L, quare B D ad H I minorem habebit rationem quàm H L ad B F, estque B D maior [b] H I, ergo & rectum H L erit maior [c] recto B F. — a 24. h. b ibidem. c 31. h.

Præterea, cum sit M N minor [d] D B, erit quadratum M N minus quadrato D B, siue rectangulum I H L minus rectangulo C A G, vnde I H ad C A minorem habebit rationem quàm A G ad H L, sed est I H maior [e] C A, ergo rectum A G erit maius recto H L. Cum sit ergo A G maior H L, & H L maior B F erit A G adhuc maior [f] B F. Quare A G rectum minoris axis est *MAXIMVM*, B F verò maioris axis rectum, est *MINIMVM*. Quod erat demonstrandum. — d 24. h. e ibidem. f 31. h.

PROBL. IV. PROP. XXXIII.

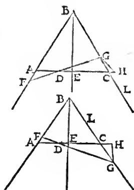
A puncto dato intra angulum rectilineum rectam applicare, cuius rectangulum segmentorum sit MINIMVM.

ESto A B C angulus rectilineus, in quo datum punctum sit D. Oportet ex D rectam in angulo applicare, ita vt rectangulum sub ipsius segmentis sit *MINIMVM*.

Ducatur B E angulum A B C bifariam secans, cui per D recta perpendicularis applicetur A D C. Dico hanc ipsam quæsitum soluere.

Cum enim in triangulis B E A, B E C anguli ad E sint recti, & ad B facti æquales, erunt reliqui anguli B A E, B C E æquales, & qui infra A C, basim trianguli æquicruris A B C, pariter æquales.

F Iam



Iam ducatur per D quælibet alia F D G. Et cum in triangulo D G C sit externus angulus D C L maior interno D G C, fiat angulus D G H ipsi D C L, siue D A F æqualis, estque angulus G D C æqualis angulo A D F, & duo simul D A F, A D F minores sunt duobus rectis, ergo & duo D G H, G D C erunt duobus rectis minores, siue G H cum D C producta conueniet, vt in H, eritque reliquus angulus H in triangulo D H G æqualis reliquo F in triangulo D F A: quare huiusmodi triangula similia erunt, & circùm æquales angulos ad D habebunt latera proportionalia, siue vt A D ad D F, ita G D ad D H, vnde rectangulum A D H æquale erit rectangulo F D G, ideoque rectangulum A D C minus erit rectangulo F D G, & hoc semper vbicunque applicata sit per D, recta F D G præter A D C. Quare rectangulum sub segmentis A D, D C est *MINIMVM* quæsitum. Quod erat faciendum.

PROBL. V. PROP. XXXIV.

A puncto intra coni-sectionem dato rectam applicare, cuius rectangulum segmentorum sit MINIMVM. In Ellipsi verò, & MAXIMVM rectangulum reperire.

ESto primùm A B C Parabole, vel Hyperbole, vt in prima figura, cuius axis B D, & datum intra ipsam punctum sit E. Oportet per E rectam sectioni applicare, ita vt rectangulum sub eius segmentis sit *MINIMVM*.

Applicetur per E recta A E D C axi ordinatim ducta. Dico hanc ipsam quæsitum soluere: siue rectangulum A E C esse *MINIMVM*.

Nam applicata per E qualibet alia inclinata F E G: non absimili modo, ac in 26. secundi conicorum, demonstrabitur applicatas A C, F G intra sectionem se mutuò secantes in E, in ipso E nunquam bifariam simul secari, ex quo ipsarum applicatarum diametri disiunctæ erunt inter se, ideoque B vertex portionis A B C non erit vertex portionis F H G: is ergo sit H; ducaturque ex B sectionem contingens B I, siue applicatę A C æquidistans; itemque ex H recta contingens H I, siue F G parallela, quę contingentes simul conuenient [a] in I. Erit ergo rectangulum A E C, ad rectangulum G E C, [b] vt quadratum B I ad quadratum H I; sed est contingens B I, ad axis verticem, minor [c] contingente H I, ergo & quadratum quadrato minus erit, siue rectangulum A E C minus rectangulo F E G, & hoc semper quæcunque sit quæ per E applicatur diuersa ab applicata A C, ergo rectangulum A E C est *MINIMVM* quæsitum.

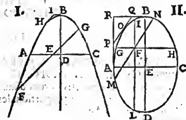
a 58. primi h.
b 16 tertij conic.
c 87. primi huius.

Sit

Sit verò ABCD in secunda figura Ellipsis, cuius axis maior BD, minor AC, centrum E, & punctum intra datum sit F. Oportet per F rectas in sectione applicare quales inuenire proposuimus.

Sit per F maiori axi BD ordinatim ducta GFH, minori verò sit IFL. Dico rectangulum GFH esse *MINIMVM*, *MAXIMVM* verò IFL.

Sit quælibet alia per F applicata MFN, & portionis MON sit vertex O, atque ex axium verticibus A, B, vti etiam ex O agantur contingentes AP, BQ, POQ, quæ simul occurrent *a* in R, P, Q. Erit ergo rectangulum GFH ad IFL, *b* vt quadratum BR ad quadratum AR, sed est contingens BR, *c* minor AR, siue quadratum BR minus quadrato AR, ergo, & rectangulum GFH minus erit rectangulo IFL.



a 58. primi h.
b 16. tertij conic.
c 87 primi huius.

Præterea rectangulum GFH ad MFN est vt quadratum BQ ad quadratum OQ, sed est contingens BQ *d* minor contingente OQ, siue quadratum BQ minus quadrato OQ, ergo rectangulum GFH minus est rectangulo MFN, & hoc semper vbicunque cadat applicata MFN: quare rectangulum GFH est *MINIMVM* quæsitum.

d ibidem.

Demùm cum rectangulum IFL ad NFM, sit *e* vt quadratum AP ad quadratum QP, sitque contingens AP *f* maior contingente QP erit quadratum AP maius quadrato QP, ergo rectangulum quoque IFL maius erit rectangulo NFM, & hoc semper vbicunque sit ducta NFM inter applicatas IFL, GFH quare rectangulum IFL est *MAXIMVM* quæsitum. Quod vltimò inuenire propositum fuit.

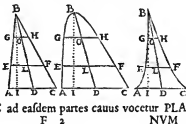
e 16. tertij huius.
f 87. primi huius.

DEFINITIONES.

I.

PLANVM ACVMINATVM REGVLARE, vel ACVMINATVM tantùm voco omnem figuram planam, circa diametrum, in alteram partem deficientem, & cuius perimeter sit in easdem partes cauus.

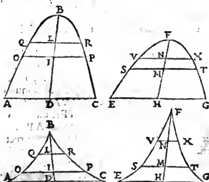
Hoc est figura plana ABC, in qua omnes rectæ lineæ AC, EF, GH, &c. à figuræ perimetro terminatæ, ac inter se æquidistantes, à quadam recta BD bifariam secentur, & in alteram partem, vt puta ad B, continuò decrescant, donec abeant in punctum B, sitque earum perimeter AGBHC ad easdem partes cauus vocetur PLA-



NVM ACVMINATVM REGVLARE, vel potius (breuitatis causa) ACVMINATVM, cuius terminus B vocetur VERTEX; & æquidistantes A C, E F, G H, &c. quæ à B D bifariam diuiduntur, dicantur APPLICATÆ ad ipsam B D, quæ vocetur DIAMETER, vel AXIS quando ipsa perpendiculariter secet easdem applicatas. A C verò dicatur BASIS ACVMINATI; & B I, quæ à vertice super basim ducitur perpendicularis, ACVMINATI ALTITVDO nuncupetur.

II.

PLANA ACVMINATA REGVLARIA PROPORTIONALIA, vel tantùm ACVMINATA PROPORTIONALIA dicantur illa, quorum omnes applicatæ à punctis eorum diametros proportionaliter diuidentibus, sint quoque inter se proportionales.



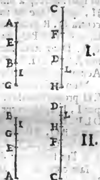
Sint nempe duo Acuminata Regularia ABC, EFG, super bases AC, EG, qualia in præcedenti definitione explicauimus, quorum diametri BD, FH proportionaliter sectæ sint in quotcunque punctis I, M; L, N, &c. siue sit BI ad ID, vt FM ad MH, & BL ad LD, vt FN ad NH, &c. atque in punctis inter sectionum applicatæ sint OP, QR; ST, VX, quę ex homologis punctis sint ad inuicem proportionales, hoc est vt AC ad EG, ita OP ad ST, & QR ad VX, &c. huiusmodi figuræ vocentur PLANA ACVMINATA REGVLARIA PROPORTIONALIA, vel tantùm ACVMINATA PROPORTIONALIA.

LEM-

LEMMA X. PROP. XXXV.

Si duæ rectæ lineæ terminatæ A B, C D bifariam sectæ fuerint in E, F, & proportionaliter producantur, vt in prima figura; vel diuidantur, vt in secunda, in G, H, ita vt sit A B ad B G, vt C D ad D H, partesq; adiectæ, vel demptæ B G, D H iterum proportionaliter secentur in I, L, ita vt B I ad I G, sit vt D L ad L H. Dico rectangulum A G B ad rectangulum A I B, esse vt rectangulum C H D ad rectangulum C L D.

NAm cum sit A B ad B G, vt C D ad D H, erit in prima figura componendo, in secunda verò diuidendo A G ad G B, vt C H ad H D, & est B G ad G I, vt D H ad H L (cum diuidendo factum sit B I ad I G, vt D L ad L H) ergo ex æquo A G ad G I erit vt C H ad H L, & in prima figura per conuersionem rationis, in secunda verò, componendo, per conuersionem rationis, & conuertendo, erit G A ad A I, vt H C ad C L: & cum superiùs demonstratum sit esse B G ad G I, vt D H ad H L, erit, per conuersionem rationis, G B ad B I, vt H D ad D L. Iam rectangulum A G B ad A I B habet rationem compositam ex ratione G A ad A I, vel ex H C ad C L, & ex ratione G B ad B I, vel ex H D ad D L, sed ex iisdem rationibus H C ad C D, & H D ad D L componitur ratio rectanguli C H D ad rectangulum C L D, quare vt rectangulum A G B ad A I B, ita rectangulum C H D ad C L D. Quod erat, &c.



THEOR. XXI. PROP. XXXVI.

Quælibet Portiones eiusdem, vel diuersarum Parabolarum sunt Acuminata Proportionalia.

Item, Portiones eiusdem, vel diuersarum Hyperbolarum, Ellipsium, aut Circulorum; quarum tamen segmenta diametrorum in iisdem portionibus intercepta ad suas semi-diametros eandem homologam habeant rationem, sunt pariter inter se Acuminata proportionalia.

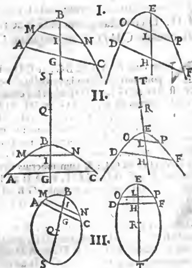
SInt primò duę portiones A B C, D E F eiusdem, vel diuersarum Parabolarum in prima figura, quarum bases sint A C, D F. Dico ipsas por-

sas portiones esse Acuminata Proportionalia.

Repertis enim earum diametris BG, EH, diuidantur ipsæ proportionaliter in I, L, applicenturque MIN, OLP. Cum sit ergo GI ad IB, vt HL ad LE, erit componendo GB ad BI, hoc est quadratum [a] AC ad MN, vt HE ad EL, siuè vt quadratum DF ad OP, ideoque & applicata AC ad MN, vt applicata DF ad OP. Quare, ex secunda præcedentium definitionum, ipsæ portiones ABC, DEF erunt Acuminata Proportionalia. Quod primò, &c.

a 20. primi conic.

Præterea sint ABC, DEF duæ portiones eiusdem, vel diuersarum Hyperbolarum, vt in secunda figura, vel Ellipsium, aut circulorum, vt in tertia, quarum bases AC, DF, & diametrorum segmenta in ipsis intercepta sint BG, EH, quæ vsque ad sectionum centra Q, R producantur, & sit vt GB ad BQ, ita HE ad ER. Dico item has portiones ABC, DEF esse inter se Acuminata Proportionalia.



Nam diuisis diametris BG, EH proportionaliter in I, L, per I, L applicentur MIN, OLP, & productis semi-diametris BQ, ER sumantur eis æquales QS, RT, ita vt SB, TE sint sectionum diametri. Iam cum sit GB ad BQ vt HE ad ER, erit conuertendo, & sumptis antecedentium duplis SB ad BG, vt TE ad EH, suntq; SB, TE bifariam sectæ in Q, R, & partes adiectæ, in secunda figura, vel demptæ in tertia BG, EH proportionaliter diuisæ sunt in I, L, ergo rectangulum SGB ad SIB, siue [b] quadratum AC, ad MN, erit vt [c] rectangulum THE, ad TLE, vel vt [d] quadratum DF ad OP, nempe applicata AC ad MN erit vt applicata DF ad OP, & permutando AC ad DF, vt MN ad OP, & hoc semper de quibuslibet applicatis per puncta diametrorum BG, EH ipsas proportionaliter secantia, quare, ex definitione secunda, ipsæ portiones ABC, DEF erunt Acuminata proportionalia. Quod vltimò demonstrandum erat.

b 21. primi conic.
c 35. h.
d 21. primi conic.

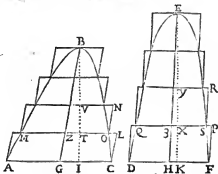
THEO-

THEOR. XXII. PROP. XXXVII.

Proportionalia Acuminata, quorum bases eorum altitudinibus sint reciprocè proportionales, sunt inter se æqualia.

Sint duo proportionalia Acuminata A B C, D E F, quorum diametri sint B G, E H, altitudines verò B I, E L, quæ inter se reciprocam habeant rationem basium A C, D F; siue sit vt A C ad D F, ita E L ad B I. Dico huiusmodi Acuminata inter se æqualia esse.

Si enim possibile est, sit alterum ipsorum, nempe A B C reliquo D E F minus, & per continuam diametri B G bisectionem, iuxta vulgatam methodum, circumscribatur ipsi A B C, figura ex parallelogrammis constans æqualium altitudinum A L, M N, &c. quorum altitudines I T, T V, &c. æquales erunt (cum altitudo B I in tot æquales partes diuidatur ab æquidistantibus parallelogrammorum basibus A C, M O, &c. in quot partes diameter B G secta fuit) huiusmodi autem circumscripta figura ex parallelogrammis, acuminatum A B C superet minori excessu, quò acuminatum D E F ponitur excedere idem acuminatum A B C, adeo vt ipsa circumscripta A B N L C sit adhuc minor acuminato D E F, cui circumscribatur item figura D E R P F ex totidem parallelogrammis D P, Q R &c. æqualium altitudinum K X, X Y, &c.



Iam, cum sit basis A C ad D F, vt altitudo E K ad B I, vel vt submultiplex K X ad æque-submultiplicem I T, erit parallelogrammum A L, æquale parallelogrammo D P. Et cum, ex constructione, sit G B ad B Z, vt H E ad E 3, erit, ex definitione proportionalium acuminatorum, A C ad D F, vt M O ad Q S, sed A C ad D F est vt E K ad B I, ergo, & M O ad Q S erit vt E K ad B I, vel vt submultiplex X Y ad æque-submultiplicem T V: parallelogrammum igitur M N æquatur parallelogrammo Q R; & sic de reliquis, singula singulis: ergo vniuersa figura A B N L C æqualis erit vniuersæ D E R P F, sed figura A B N L C facta est minor acuminato D E F, quare figura D E R P F erit quoque minor eodem sibi inscripto acuminato D E F: totum parte, quod est absurdum. Nullum ergo horum acuminatorum est reliquo minus, quapropter æqualia esse inter se necesse est. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLIVM.

EX hac facilè elicietur methodus, qua præcipuas quorumlibet Acuminatorum passiones ostendi possint, nempe: ipsa Acuminata à diametris bifariam secari: & Proportionalia Acuminata æqualium altitudinum inter se esse vt bases: & (tanquam Corollarium) Acuminata proportionalia æqualium basium esse inter se vt altitudines: item duo quæcunque Acuminata proportionalia habere inter se rationem compositam ex ratione basium, & ex ratione altitudinum: & ad inscripta triangula, vel circumscripta parallelogramma eandem retinere rationem, aliaque his similia: & quod de proportionalibus Acuminatis, idem penitus euenire de similibus mensalibus proportionalium Acuminatorum, præmissa priùs harum mensalium definitione, &c. quæ omnia ad infinitas figurarum species, ne dum hactenus tractatas Parabolas, Hyperbolas, &c. maximè conducunt. Sed hæc aliàs, quę tamen cum sint haud obscurę indagationis, & huic nostro instituto prorsus aliena, erudito Lectori sic præmonstrasse sufficiat.

LEMMA XI. PROP. XXXVIII.

Si duæ rectæ lineæ inter se æquales fuerint, & parallelæ, & ab earum extremis terminis ducantur lineæ quemlibet angulum efficientes, ab alteris autem terminis aliæ ipsis æquidistantes; hæ quoque angulum inter datas constituent, & recta angulorum vertices coniungens erit vtrique datarum æqualis, & parallela.

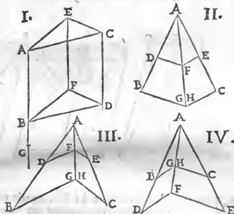
Si verò datæ rectæ lineæ terminatæ ad quemcunque angulum applicatæ fuerint, & vbicunque proportionaliter sectę, aut productæ, atque ab homologis earum punctis, hoc est, vel ab extremis terminis, vel ab inter-sectionum, aut productionum punctis, ductæ fuerint intra datum angulum aliæ rectæ lineæ, quæ item angulum quemlibet constituant, à reliquis verò punctis aliæ ipsis æquidistanter ducantur, hæ pariter tertium angulum efficient intra datum, & horum trium angulorum vertices in vna eademque recta linea reperientur.

SIt, in prima figura, recta A B æqualis, & parallela ad C D, & ex terminis A, C inter eas constituatur angulus quicunque A E C ductaque B F parallela ad A E, D F verò ad C E. Dico B F, D F inter datas æquidistantes conuenire, & E F iungentem angulorum vertices, alteri A B, vel C D esse æqualem, & parallelam.

Iungantur A C, B D: & quoniam B F est parallela ad A E, erit angulus G B F æqualis angulo B A E; cumque A B sit æqualis, & parallela ad C D, erunt

C D, erunt A C, B D æquales, & parallelæ, idcirco angulus G B D æqualis angulo B A C, ergo reliquus angulus D B F, æqualis erit reliquo C A E; eadem ratione oſtendetur angulum B D F æquari angulo A C E, & B D demonſtrata eſt æqualis ipſi A C, ergo in triangulis B F D, A E C, cum æqualia latera B D, A C æqualibus angulis adiaceant, erit tertius angulus B F D, tertio A E C æqualis, & reliqua latera B F, A E, itemque D F, C E, inter ſe æqualia, ſed ſunt quoque parallela, ob hypoteſim, ergo E F angulorum vertices iungens, erit æqualis, & parallela ad A B, vel ad C D; cadetque inter datas A B, C D, cum punctum E, ex quo ducitur ſit inter eas, ſicque angulus B F D cadet intra datas æquidiſtantes A B, C D. Quod primò oſtendere opus erat.

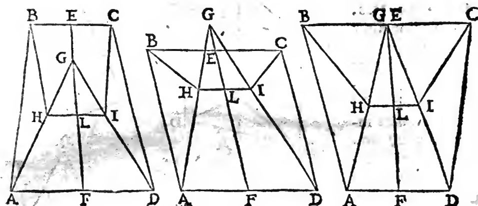
Sint verò, in reliquis tribus figuris, datæ rectæ A B, A C terminatæ angulum B A C conſtituentes, quę proportionaliter ſecentur, vel producantur in D, E; & ex punctis D, E ductæ ſint D F, E F ſibi ipſis occurrentes intra datum angulum in F, ex reliquis verò punctis B C, alię ipſis æquidiſtantes B G, C H. Dico item has intra angulum B A C inter ſe conuenire, vt in G, ac tres angulorum occurſus A, F, G in eadem recta linea reperiri.



Nam iuncta A F, & producta cum B G ipſi D F ęquidiſtet, & A F cum D F conueniat, conueniet quoque producta cum B G, ſit ergo G punctum occurſus. Item cum C H æquidiſtet ipſi E F, & A F ſecet E F, producta ſecabit quoque C H: ſecet in H. Oſtendam puncta G, H, quæ iam in recta A F reperiri demonſtratum eſt, eſſe vnum idemque punctum rectæ A F: eſt enim in triangulo A G B vt G A ad A F, ita B A ad A D, vel, ob hypoteſim, vt C A ad A E, vel vt H A ad A F, ergo G A, & H A ſunt æquales, hoc eſt puncta G, & H non ſunt duo, ſed vnum tantùm, & in eadem recta linea in qua ſunt puncta A, F. Ergo B G, C H inter ſe conueniunt intra datum angulum, ac trium angulorum vertices ſunt in directum poſiti. Quod vltimò oſtendere propoſitum fuit.

LEMMA XII. PROP. XXXIX.

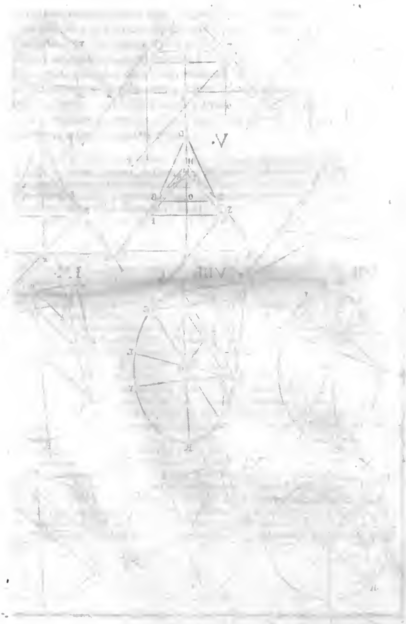
Si fuerit quodcunque quadrilaterum rectilineum ABCD, cuius opposita latera AD, BC bifariam secta sint in punctis F, E, iunctaque sit recta FE, in qua sumptum sit quodlibet punctum G, vel intra, vel extra quadrilaterum à quo ad terminos alterius æquidistantium veluti ad A, D, ductæ sint GA, GD, ac in triangulo AGD, sit quædam HI ipsis AD, BC æquidistans, & EF secans in L. Dico, si iungantur BH, CI, triangula ABH, DCI inter se æqualia esse.



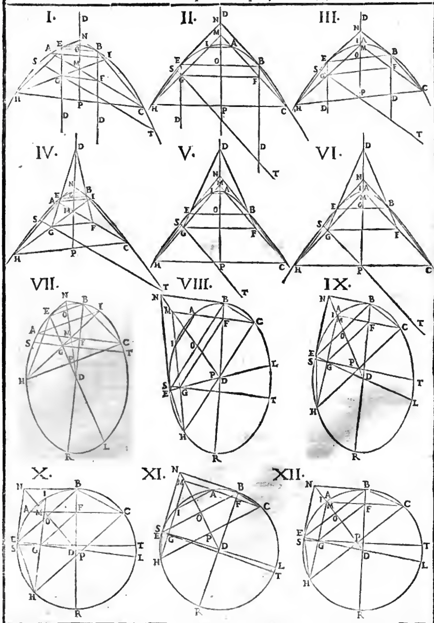
NAm totum quadrilaterum ABEF, æquale est integro quadrilatero DCEF (vtrunque enim diuiditur per diagonales AE, DE, in duo triangula alterum alteri æquale, eò quod sint super æqualibus basibus, ac inter easdem parallelas) eadem ratione quadrilaterum AHLF æquale est quadrilatero DILF, & quadrilaterum BELH æquale quadrilatero CELI, ergo, & reliquum triangulum ABH reliquo triangulo DCI est æquale. Quod erat demonstrandum.

His itaque præostensis, ad inuestigationem MAXIMARVM, MINIMARVMQVE portionum per idem datum punctum ex qualibet coni-sectione abscissarum accedamus, præmisso tamen, super figuras tertij Schematismi, sequenti Theoremate, vniuersalem, simulque facilem methodum exhibente, qua æquales portiones de eadem coni-sectione abscindi possunt.

THEO-


V
VIII

Schematismus Tertius pro Prop. 40. & 77. Lib. II.



THEOR. XXIII. PROP. XXXX.

Si in Parabola, ex binis ipsius diametris duo æqualia segmenta sint abscissa: in Hyperbola verò, Ellipsi, vel circulo duæ semi-diametri proportionaliter intra sectionem sectę fuerint, & ex terminis æqualium diametrorum in Parabola, vel ex punctis diuisionum, in reliquis sectionibus, ordinatim applicentur lineæ ad suas diametros, & producantur, donec ad vtranque partem sectioni occurrant: coni-sectionum portiones; at in Ellipsi, vel circulo, minores portiones iisdem applicatis, tanquam basibus insistentes, inter se æquales erunt. Schematismus 3.

ESto ABC Parabole, in prima, secunda, & tertia figura, vel Hyperbole in quarta, quinta, & sexta, aut Ellipsis in septima, octaua, & nona, aut circulus, in reliquis, quarum sectionum binæ diametri in Parabola sint DB, DE, à quibus dempta sint æqualia segmenta BF, EG, & in reliquis binæ semi-diametri DB, DE (quæ primò in Ellipsi, vel circulo omnino constituant angulum BDE) ita intra sectiones sectæ sint in F, G, vt DB ad BF, sit vt DE ad EG, & per puncta F, G, in singulis figuris sint ad diametros DB, DE ordinatim ductæ AFC, HGI, quæ ad vtranque partem sectioni occurrent [a] in punctis A, C; H, I, & bifariam in F, G secabuntur, cum DB, DG, sint ipsarum diametri. Dico portiones ABC, HEI super iisdem applicatis, tanquam basibus insistentes, inter se æquales esse. a 19. primi conic.

Nam, ductis ex B, E rectis BN, EN sectionem contingentibus in B, E; ipsæ occurrent [b] simul in N inter diametros DB, DE, & applicatis HI, AC æquidistabunt. Iungantur præterea EB, GF. b 58. primi huius.

Iam in Parabolis, cum sint EG, BF inter se æquales, & parallelę, iunctæ quoq; EB, GF inter se æquidistabunt, & cum ex illarum terminis E, B, ductæ sint rectę EN, BN angulum ENB inter eas constituentes, atq; ex reliquis terminis G, F, sint GI, FA, ipsis EN, BN æquidistantes; ipsæ GI, FA inter easdem EG, BF simul conuenient, vt in M, & iuncta NM iisdem EG, BF æquidistabit, siue erit altera Parabolæ [c] diameter. Cum ergo sit EG parallela ad [d] NM, & EN ad GM, erit EN æqualis GM; eademque ratione BN æqualis FM, quare vt EN ad NB, ita GM ad MF. c 38. h. d 46. primi conic.

In reliquis verò figuris, cum rectæ DB, DE angulum EDB efficientes, proportionaliter sectæ, aut productæ sint in G, F, sintque ex earum homologis terminis E, B ductæ EN, BN angulum inter ipsas constituentes ENB, & ex reliquis diuisionum punctis G, F sint GI, FA iisdem EN, BN parallelę, hæ intra datum angulum EDB simul conuenient, vt in M; & recta iungens puncta D, M, per occursum M omnino transibit, siue [e] erit alia sectionis diameter. Cumque ob parallelas GM, EN sit GM ad EN, vt MD ad DN, & ob parallelas MF, NB sit MF ad NB, vt ea- e 38. h. f 47. primi conic.

vt eadem M D ad D N, erit G M ad E N, vt M F ad N B, & permutando GM ad MF, vt EN ad NB.

Cum ergo, in figuris prima, secunda, quarta, quinta, septima, octaua, decima, ac decimaprima sit GM ad MF, vt EN ad NB, erit quoq; quadratum GM ad MF, vt quadratum EN ad NB, vel vt [a] rectangulum H MI ad rectangulum CMA, & permutando quadratum G M ad rectangulum HMI, vt quadratum FM ad rectangulum CMA, & couertendo in prima, quarta, septima, & decima figura (in quibus applicatæ HI, C A secant se mutuò intra sectionem in puncto M) rectangulum HMI ad quadratum GM, vt rectangulum CMA ad quadratum FM, & componendo rectangulum HMI cum quadrato GM, siue vnicum quadratum HG, (nam est AC bifariam secta in G, & non bifariam in M) ad quadratum GM, vt rectangulum CMA cum quadrato FM, siue vt vnicum quadratum CF (cum AC quoque secta sit bifariam in F, & non bifariam in M) ad quadratum FM. In figuris verò secunda, quinta, octaua, & vndecima, in quibus applicatæ HI, CA se mutuò secant extra sectionem in puncto M, cum sit GM quadratum ad rectangulum H M I, vt quadratum FM ad rectangulum CMA, erit per conuersionem rationis quadratum MG ad quadratum GH (est enim rectangulum HMI cum quadrato GH æquale quadrato G M, cum sit HI bifariam secta in G, & ei adiecta sit IM) vt quadratum M F ad quadratum FC, ob eandem rationem, (nam CA quoq; bifariam secta est in C, eiq; addita est in directum AM) & conuertendo quadratum HG ad GM quadratum, erit vt quadratum CF ad FM. Itaq; in singulis prædictis figuris, deptis tertia, sexta, nona, & duodecima, cum demonstratum sit quadratum HG ad GM esse vt quadratum CF ad FM, erit quoque linea H G ad GM, vt linea CF ad FM. In figuris deniq; tertia, sexta, nona, & duodecima, in quibus applicatę HI, CA conueniunt simul cum ipsa sectione in puncto M, patet quoque esse HG ad GM, vt CF ad FM, cum ipsæ HI, C A, vel HM, CM bifariam secentur in G, F ab earum diametris EG, BF. Est igitur in qualibet datarum figurarum huius schematismi, HG ad GM, vt CF ad FM, quare iuncta HC æquidistabit iunctæ GF; sed est I G æqualis HG, & AF æqualis CF, ergo etiam IG ad GM erit vt AF ad FM, ideoque iuncta AI æquidistabit eidem GF, sed EB quoque ipsi GF ęquidistat (vt iam suprà ostendimus in Parabolis, & cum in reliquis sectionibus sit DE ad EG, vt DB ad BF ex hypotesi) ergo quatuor iunctæ rectæ lineæ EB, AI, GF, HC sunt inter se parallelæ; sed NM, quàm superiùs ostendimus esse sectionis diametrum, transit per N occursum contingentium E N, BN, ergo recta EB puncta contactuum iungens, ab eadem diametro N MD bifariam secabitur, [b] vt in O, ac ideò omnes aliæ in sectione applicatæ ipsi EB ęquidistantes, nempe AI, GF, HC, ab eadem DNM bifariam secabuntur, vt HC in P.

Denique iungantur rectæ HE, CB, & fiet quadrilaterum HEBC, cuius opposita latera HC, EB sunt parallela, & bifariam secta à recta PO, in qua sumptum est punctum M, & ab ipso ad terminos alterius ęquidistantium nempe ad H, C ductę sunt rectæ MH, MC, ac in triangulo HMC est GF ipsi HC parallela, quare iunctę EG, BF auferent triangula EGH, BFC inter se [c] æqualia; quapropter basis HG ad basim CF erit reciprocè, vt altitudo

[a] 17. tertij conic.

[b] 30 secũdi conic.

[c] 39. h.

titudo trianguli C B F ad altitudinem trianguli H E G, sed horum triangulorum altitudines eædem sunt, ac altitudines portionum A B C, H E I, cum puncta B, E sint earundem portionum vertices; quare vt basis H G ad basim C F, vel sumptis duplis, vt H I basis portionis H E I, ad A C basim portionis A B C, ita reciprocè altitudo portionis A B C ad altitudinem portionis H E I, suntque huiusmodi portiones [a] Acuminata regularia, & proportionalia, & eorum bases altitudinibus reciprocantur, quare ipsa Acuminata, seu portiones H E I, A B C inter se sunt [b] æquales. Quod ostendere propositum fuit, quodque de sola Parabola demonstrauit Geometrarum Princeps in 4. Prop. de Conoid. ac Sphæroid. supposita tamen eiusdem Parabolę quadratura.

[a] 36. h.

[b] 37. h.

COROLL. I.

Hinc est, quod applicatæ ex terminis æqualium diametrorum in Parabola, vel ex punctis, in reliquis sectionibus, proportionaliter diuidentibus semi-diametros ad angulum constitutas, omninò se mutuò secant; & quod rectæ lineę, tùm harum applicatarum puncta media, tùm extrema iungentes, rectæ semi-diametrorum terminos iungenti æquidistant. Demonstratum est enim H I, A C secare se mutuò in M, & iunctas H C, G F, A I ipsi E B esse parallelas.

COROLL. II.

Patet quoq; in quarta, quinta, septima, & octaua figura, portiones eiusdem Ellipsis, vel circuli, quarum bases transeant per puncta earum semi-diametros proportionaliter secantia, etiam si ipsæ semi-diametri sint in directum positæ, hoc est applicatæ inter se æquidistent, esse quoque inter se æquales. Vtra enim talium portionum æqualis demonstratur, (vt in superiori propositione) ei portioni, cuius basis sit applicata per punctum proportionaliter secans aliam semi-diametrum, quæ cum prædictis angulum constituat.

COROLL. III.

Ex ijsdem constat, quod si quotcunque applicatæ in eadem Ellipsi, vel circulo integras diametros proportionaliter secent, abscissæ portiones vicissim æquales erunt, hoc est minor minori, & maior maiori.

Si enim in prædictis figuris sint duæ diametri B R E L, ita sectæ in F, G; vt R F ad F B sit vt L G ad G E, erit componendo; & sumptis antecedentium subduplis D B ad B F, vt D E ad E G; applicatis ergo A F C, H G I erunt portiones A B C, H E I inter se æquales, & reliqua portio A R C reliquæ portioni H R I æqualis erit.

PRO-

PROBL. VI. PROP. XXXXI.

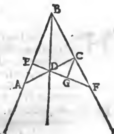
Per datum punctum in angulo rectilineo, rectam applicare, quæ de angulo abscindat triangulum MINIMVM.

ESto angulus rectilineus A B C, in quo datum sit punctum D. Oportet ex D rectam applicare, quæ ab angulo auferat triangulum *MINIMVM*.

Iungatur diameter B D, ad quàm applicetur per D recta A D C, quæ in dato puncto D [a] bifariam secetur. Dico hanc ipsam quæsitum soluere, hoc est triangulum A B C esse *MINIMVM*.

[a] ex 66. 1. huius.

Ducatur quælibet alia E D F, & ab extremo applicatæ A C, quod cadit supra E F, siue ex puncto C agatur C G ipsi E A æquidistans. Et cum sit A D æqualis D C, ob constructionem, erit quoque E D æqualis D G, & angulus A D E æquatur angulo C D G, ergo triangulum A D E, triangulo C D G æquale erit, ac ideò A D E minus triangulo C D F; si ergo addatur commune trapetium B E D C, erit triangulum A B C minus triangulo E B F, & hoc semper: quare triangulum A B C est *MINIMVM*. Quod reperiendum erat.



PROBL. VII. PROP. XXXXII.

Per datum punctum intra coni-sectionem, vel circulum rectam applicare, quæ de ipsa auferat portionem MINIMAM.

ESto A B C data Parabole, vt in prima figura, vel Hyperbole, vt in secunda, aut Ellipsis, vel circulus, vt in tertia, quarum centrum H, & punctum intra datum sit D. Oportet per D rectam applicare, quæ de sectione abscindat portionem *MINIMAM*.

Ducatur H B D sectionis diameter transiens per datum punctum D, per quod ei ordinatim applicetur recta A D C. Dico portionem A B C esse *MINIMAM* quæsitam.

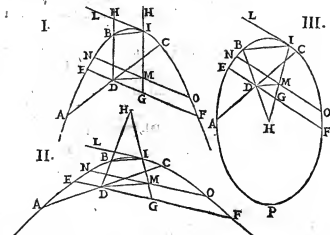
Nam applicata per D in sectione qualibet alia E D F, cum ipsa E F alteram applicatam A C in sectione bifariam secet in D, ipsæ se mutuò bifariam non secabunt, per 6. secundi conicorum, quæ licet de sola Ellipsi, vel circulo agat, verificatur quoque de quacunque data coni-sectione. Secetur ergo E F bifariam in G, per quod ducatur eius diameter G I H sectioni occurrens in I, per quod agatur sectionem contingens I L, quæ ipsi E G F æquidistabit, [b] quare si iungatur I B, cum ipsa tota cadat [c] intra sectionem, & alteram parallelarum L I secet in I, producta ad partes B, conueniet cum reliqua producta F D E ad partes E, ac ideò D M, quæ ex D ducitur ipsi B I æquidistans cadet supra D F, secabitque diametrum I G, vt in M, cui

[b] 5. secundi conic.
[c] 10. primi conic.

per M

per M applicetur recta NMO, quæ applicatæ EGF æquidistabit.

Iam, in prima figura, cum sit BD parallela ad IM, & BI ad DM, erit diametri segmentum BD æquale diametri segmento IM; suntque ex D, M applicatæ diametris rectæ ADC, NMO, vnde portiones ABC, NIO æquales [a] erunt, [a] 40. h.



In reliquis verò, cum in triangulo DHM sit BI parallela ad DM, erit HB ad BD, vt HI ad IM, suntque ex D, M applicatæ diametris rectæ ADC, NMO, quare portiones ABC, NIO æquales [b] erunt. Cum ergo in singulis figuris portio ABC demonstrata sit æqualis portioni NIO, & sit portio NIO minor portione EIF, pars toto, ergo portio ABC erit quoque minor portione EIF, & sic quacunque alia portione, ab applicata per D abscissa, minor demonstrabitur. Vnde portio ABC est *MINIMA* quæsita. Quod faciendum erat. [b] ibidem.

COROLL.

Hinc est, quod dum per datum punctum D intra Ellipsim, ducitur applicata ADC *MINIMAM* portionem abscindes, habetur simul *MAXIMA* portio, quæ est reliqua APC, vt per se satis constat.

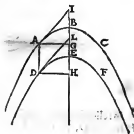
THEO-

THEOR. XXIV. PROP. XXXXIII.

In congruentibus Parabolis per diuersos vertices simul adscriptis, intercepta communium diametrorum segmenta inter se sunt æqualia, & huiusmodi Parabolæ dicantur ęquidistantes. Contingentes verò vtranq; sectionem ad terminos eiusdem diametri inter se æquidistant.

Sint duæ congruentes Parabolæ ABC, DEF per diuersos vertices B, E simul adscriptæ circa communem diametrum BEH, & inter ipsas ducta sit quæcunque alia AD ipsi BE parallela, (quæ vtrique Parabolæ conueniet [a] in A, D eritque earum communis [b] diameter) atque ex terminis A, D, agantur AI, DL Parabolas contingentes in A, D, & communi diametro BE occurrentes [c] in I, L. Dico diametrorum intercepta segmenta BE, AD æqualia esse, & contingentes AI, DL inter se æquidistare.

a 26. primi conic.
b 46. ibid.
c 24. ibid.



Nam primum patet ex primo Coroll. 42. primi huius: cumq; omnes interceptæ BE, AD, &c. sint æquales vocentur, huiusmodi Parabolæ inter se ęquidistantes. Secundum verò, ita ostenditur.

Applicentur ex A, D ad diametrum BH rectæ AG, DH; erit AH parallelogrammum, ex quo GH æqualis erit AD, siue ipsi BE, quare dempta, vel addita, vti opus fuerit, communi GE, prouenict BG ęqualis HE, & dupla [d] IG duplæ LH æqualis erit, & est GA æqualis HD, & angulus IGA angulo LHD æqualis, ergo angulus quoque GIA angulo HLD æqualis erit. Quare contingentes AI, DL inter se æquidistant. Quod, &c.

d 35. ibid.

THEOR. XXV. PROP. XXXXIV.

In Hyperbolis, aut Ellipsibus similibus, & concentricis, per diuersos vertices simul adscriptis, intercepta communium diametrorum segmenta ad proprias semi-diametros vnam eandemque habent rationem, & quæ sectiones contingunt ad terminos eiusdem diametri inter se æquidistant.

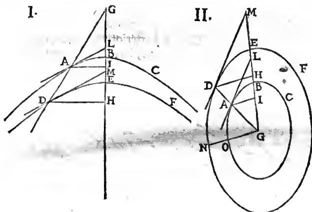
Sint duæ Hyperbolæ similes in prima figura, vel duæ similes Ellipses in secunda, quarum commune centrum sit G, & communis semi-diameter GBE, sitque ducta quæcumque alia GAD, (quæ tamen in Ellipsi cadat inter coniugatas semi-diametros GE, GN) eritque GAD, [e] item communis sectionum semi-diameter, ducâturque AL, DM ad terminos A, D se-

e 47. ibid.

ctiones

ctiones contingentes, quæ productæ, communi diametro G B E [a] occurrent in L, M. Dico primùm G A ad A D esse vt G B ad B E, & contingentes A L, D L inter se æquidistare. [a] 24. 25. primi conic.

Applicentur ex A, D ad diametrum communem G B M rectæ A I, D H. Erit iam in sectione D E F, rectangulum G H M ad quadratum H D, [b] vt transuersum ad rectum, vel, ob sectionum similitudinem, vt transuersum sectionis A B C ad eius rectum, vel vt rectangulum G I L ad quadratum I A, & quadratum D H ad H G, est vt quadratum A I ad I G, ergo ex æquo rectangulum G H M ad quadratum G H, erit vt rectangulum G I L ad quadratum I G, & conuertendo quadratum G H ad rectangulum G H M, vt quadratum I G ad rectangulum G I L, & per conuersionem rationis in prima figura, & componendo in secunda, quadratum G H ad rectangulum [b] 37. ibid.



H G M, vt quadratum I G ad rectangulum I G L, & permutando quadratum H G ad G I, vel quadratum D G ad G A, erit vt rectangulum H G M ad rectangulum I G L, vel permutatis æqualibus, [c] vt quadratum E G ad quadratum G B, seu linea D G ad G A, vt linea E G ad G B, & diuidendo, & conuertendo G A ad A D, vt G B ad B E. Quod primò erat, &c. [c] ibidem.

Præterea, cum superiùs demonstratum sit esse rectangulum G H M ad quadratum H D, vt rectangulum G I L ad quadratum I A, erit permutando rectangulum G H M ad G I L, vt quadratum H D ad I A; sed proportio quadrati H D ad I A componitur ex duabus rationibus H D ad I A, vel ex duabus rationibus H G ad G I, & proportio rectanguli G H M ad G I L componitur ex duabus rationibus, nempe ex G H ad G I, & ex H M ad I L; ergo proportio G H ad G I, hoc est H D ad I A, æqualis est proportioni H M ad I L, & permutando D H ad H M, erit vt A I ad I L, &

H anguli

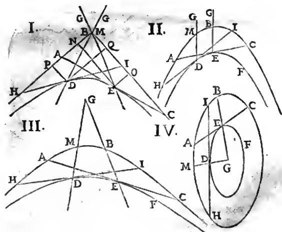
anguli ad H, I sunt æquales, ergo triangula DHM, AIL sunt æquiangula, hoc est angulus DMH æqualis erit angulo ALI, ac ideo DM, AL inter se æquidistant. Quod vltimò demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

PRoportionalitas, quàm primo loco superioris theorematis inter semidiametros concentricorum quadrantum NGE, OGB similium Ellipsium inuenimus, eadem penitùs reperietur in alijs deinceps quadrantibus, & ad verticem, vt per se satis patet.

THEOR. XXVI. PROP. XLV.

In Hyperbola intra angulum asymptotalem; vel in Parabolis parallelis, siue in Hyperbolis, aut Ellipsibus similibus, & concentricis circa eandem diametrum per diuersos vertices simul adscriptis, portiones omnes anguli, vel exterioris sectionis, quarum bases interiorem sectionem contingant, inter se sunt æquales.



SIt intra angulum asymptotalem ABC descripta Hyperbole DEF, vt in prima figura, vel duæ æquidistantes Parabolæ ABC, DEF, vt in secunda; vel similes concentricæ Hyperbolæ, vt in tertia, aut Ellipses, vt in quarta, quarum commune centrum sit G, ac omnes per diuersos vertices B, E sint simul adscriptæ circa eandem diametrum GBE, & ad verticem E interiorem sectionem contingat recta AEC, & ad quodcunque aliud punctum

ctum D contingat eandem recta HDI. Dico ipsas contingentes exteriori sectioni ad vtranque partem occurrere, ac de ea æquales portiones abscindere.

Nam ductis diametris GBE, GMD; cum in prima figura rectæ AEC, HDI Hyperbolen contingant in E, D, ipsæ productæ cum vtraque asymptoto conuenient in A, C, & in H, I, atque a bisariam secabuntur in E, D, à quibus si ducantur asymptotis æquidistantes EN, EO, & DP, DQ, erit rectangulum NEO æquale b rectangulo PDQ, siue parallelogrammum NO æquale sibi æquiangulo parallelogrammo PQ, & duplum duplo æquale erit, hoc est triangulum ABC, triangulo HBI (cum AC, HI sint bifariam sectæ in E, D.) a 3 dic. b 12. ibid.

In reliquis verò figuris cum AEC contingat in E interiorem sectionem DEF, ipsa æquidistabit c contingenti ex B exteriorem, ac ideo erit vna applicatarum ad diametrum GBE in exteriori sectione ABC, & bifariam secabitur in E. Eadem ratione contingens HDI erit vna applicatarum ad diametrum GMD in exteriori, & bifariam secabitur in D, eritque in secunda figura segmentum diametri BE æquale segmento MD, & in tertia habebit d GB ad BE eandem rationem, ac GM ad MD, in quarta denique GE ad EB eandem, ac GD ad DM: quare portiones ABC, HMI exterioris sectionis ABC, quarum bases contingunt interiorem DEF inter se sunt e æquales. Quod demonstrandum erat. c 43.44.h. d ibidem. e 40. h.

COROLL.

Hinc est, quod contingentes ad puncta interioris concentricæ sectionis, exteriori semper ad vtranque partem occurrunt, & à tactibus bifariam secantur.

THEOR. XXVII. PROP. XLVI.

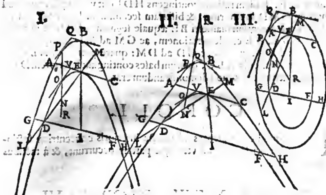
Si in Parabolis parallelis, vel in Hyperbolis, aut circulis, siue in Ellipsibus similibus, & concentricis ad punctum quodlibet interioris sectionis, quædam recta linea contingat, cui ducta sit quęcunq; alia æquidistans, vtranque sectionem secans, erit rectangulum sub segmentis huiusmodi applicatę inter vtranque sectionem interceptis, æquale quadrato semi-tangentis.

Sint duę Parabolę ęquidistãtes, vt in prima figura, vel similes, & concẽtricę Hyperbolę, vt in secũda, aut Ellipses, vel circuli, vt in tertia, ABC, DEF, quarũ centrum, respectiuè sit R, & ad quodcunq; punctum E interioris sit contingens recta AEC, (quæ ad vtranque partem exteriori f occurret in A, C, & à tactu E bifariam secabitur) eique sit æquidistanter ducta quælibet alia GDH, (quæ item ad vtranque partem exterioris occurret in f Coroll. 45. h.

G, H cum sit vna applicatarum, &c.) interiorem secans in D, F. Dico rectangulum sub segmentis GD, DH æquari quadrato semi-tangentis AE.

Nam iuncta DE, & bifariam secta in N, ducatur eius diameter NOP, quæ erit vtriusque sectionis diameter (cum ipsę ponantur parallelę, vel concentricæ) eas secans in O, P. Patet, si ex O, P concipiantur contingentes sectiones OV, PQ has inter se [a] æquidistare, sed OV ipsi DE ęquidistat, cum hæc sit vna applicatarum in sectione DEF ad diametrum RNO, quare, & PQ ipsi DE æquidistabit, hoc est DE erit vna applicatarum in sectione ABC ad diametrum RNP; ex quo NE producta ad vtranque partem exteriori sectioni ABC occurret, vt in L, M, & à diametro PN bifariam secabitur in N, sed DE quoque bifariam secta fuit in N, quare interceptæ LD, EM inter se sunt æquales, hoc est rectangulum LDM æquale est rectangulo LEM.

[a] 43. 44. huius.



Iam cum sit applicata AC bifariam secta in E, ducta eius diametro BE, hæc quoque bifariam secabit aliam applicatam GH, vt in I, eritque etiam diameter sectionis parallelæ, vel concentricæ DEF; & cum AC contingat sectionem DEF in E, sitque DF ei æquidistans, hæc item bifariam secabitur à diametro EI, vt in I. Cum sit ergo GI æqualis IH, & ablata DI æqualis ablatæ IF, erit reliqua GD reliquæ FH æqualis, siue rectangulum GDH æquale rectangulo GFH.

Tandem ex B ducatur contingens BQ alteri contingenti PQ conueniens in Q. Erit ergo rectangulum GDH ad LDM, [b] vt quadratum BQ ad PQ; eademque ratione rectangulum AEC ad LEM, vt quadratum BQ ad PQ: quapropter rectangulum GDH ad LDM, erit vt AEC ad LEM, & permutando GDH ad AEC, vel ad quadratum AC, (cum AE, EC sint æquales) vt rectangulum LDM ad LEM, sed LDM ipsi LEM æquale ostensum fuit, quare, & rectangulum GDH, vel GFH æquale erit quadrato semi-tangentis AE. Quod erat demonstrandum: quodque

[b] 17. tertij conic.

quodque in parallelis Parabolis, ac similibus concentricis Hyperbolis in 42. & 47. primi huius; sed alijs aggressionibus ostensum fuit.

COROLL. I.

HInc est, quod in parallelis Parabolis, vel concentricis, ac similibus Hyperbolis, aut Ellipsibus, applicata in interiori sectione hinc inde producta exteriori necessariò occurrit, totaque ab illius diametro bifariam secatur, & quod huius applicatæ intercepta segmenta inter se sunt æqualia.

Demonstratum est enim applicatas DE, DF in interiori sectioni DEF exteriori ABC occurrere in L, M, & in G, H, & diametros ON, FI, quæ bifariam secant DE, DF in N, I, bifariam quoque diuidere totas LM, GH, atque interceptas portiones LD, EM inter se æquales esse, itemque GD, FH æquales.

COROLL. II.

COnstat etiam ex vltima parte huius Theorematis, quod, si in quacunq; coni-sectione, vel circulo duæ rectæ lineæ applicatæ fuerint inter se æquidistantes, ad vtranque partem sectioni occurrentes, quæ à tertia quadam applicata vtcunque secentur, rectangula sub segmentis æquidistantium eandem inter se habere rationem, quam rectangula sub segmentis tertiæ secantis homologè sumpta.

Ibi enim ostensum fuit tùm in Parabola, tùm in Hyperbola, aut Ellipsi, vel circulo ABC, in quibus duę æquidistanter applicatæ AC, GH secantur à tertia applicata LM in punctis E, D, rectangulum GDH ad AEC, esse vt rectangulum LDM ad LEM.

THEOR. XXVIII. PROP. XLVII.

In Hyperbola intra angulum asymptotalem descripta, vel in æquidistantibus Parabolis, aut similibus concentricis Hyperbolis, aut Ellipsibus, rectarum in exteriori applicatarum, ac interiorem sectionem contingentium, MINIMA est ea, quæ ad verticem maioris axis ducitur. At in Ellipsibus, MAXIMA est quæ ad verticem minoris axis.

ESto, in prima figura, in angulo asymptotali ABC descripta Hyperbole DEF, cuius axis BEG, vel in secunda, sint duæ Parabolæ æquidistantes, vel duæ similes concentricæ Hyperbolæ ABC, DEF circa axim BE; aut in tertia, duæ similes concentricæ Ellipses ABC, DEF, sitque exterioris sectionis axis maior BPN, minor OPQ, & in interiori sit maior

EPK,

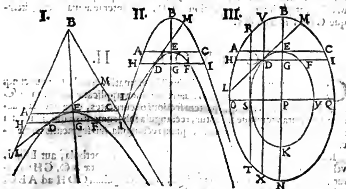
EPK, minor SPY, & in quauis figura ad E verticem maioris axis interiorem sectionem contingat recta AEC, quæ ad vtranque partem exterioris pertinget, [a] ac bifariam secabitur in E. Dico ipsam AEC esse *MINIMAM* exteriori sectioni applicatarum, atque interiorem contingentium. Et in Ellipsibus contingentem RST ad verticem minoris axis esse *MAXIMAM*.

a Coroll. 45. huius.

Sit quæcunque alia contingens LDM ad punctum D, quæ item exteriori sectioni occurret in L, M, [b] & bifariam secabitur in D, & per D agatur HDI ipsi AEC æquidistans, exteriori occurrens in H, I. Et cum in sectione ABC per punctum D intra ipsam sumptum, sint duæ HDI, LDM, quarum prima maiori axi BG est perpendicularis, altera verò inclinata, erit rectangulum HDI minus rectangulo LDM, (cum ipsum HDI sit *MINIMVM* [c]) sed HDI æquatur [d] quadrato AE, ergo quadratum AE

b ibidem.

c 33. 34. h. d 46. h.



minus erit rectangulo LDM, siue quadrato LD, & quadruplum quadruplo minus, hoc est quadratum AC minus quadrato LM, siue contingens linea AC minor contingente AM, & hoc semper, vbicunque contingat obliqua AM: quare AEC erit *MINIMA* interiorem sectionem contingentium. Quod erat primò, &c.

Iam, ducta sit per D, recta VDX æquidistans contingenti RST. Et cum in Ellipsi ABC sit per punctum D recta VDX minori axi OQ perpendicularis, sitq; alia obliqua LDM; erit rectangulum VDX maius rectangulo LDM (cum VDX sit [e] *MAXIMVM*) sed VDX æquatur [f] quadrato RS, quare quadratum RS maius erit rectangulo LDM, siue quadrato LD, & quadruplum quadruplo maius, hoc est quadratum RT maius quadrato LM, hoc est linea RT maior linea RM, & hoc semper de qualibet contingente inter S, & E, quare ipsa RT erit *MAXIMA* interiorem Ellipsim contingentium. Quod erat vltimò demonstrandum.

e 34. h. f 46. h.

THEO-

THEOR. XXIX. PROP. XLVIII.

MAXIMA portionum eiusdem anguli rectilinei, vel Hyperbole, & quarum diametri sint æquales, est ea, cuius diameter sit axis dati anguli, vel Hyperbolæ.

ESto primùm, in prima figura, ABC angulus rectilineus, circa axim BD, cui applicata sit perpendiculariter quæcunque AEC, eum secans in E. Dico portionum, siue triangulorum ex dato angulo abscissorum, & quorum diametri sint æquales ipsi BE, *MAXIMVM* esse ABC.

Nam cum BE sit perpendicularis ad AC, facto centro B interuallo BD, ac circulo descripto, eius peripheria continget rectam AC in D, anguli latera secans in F, K; quare diametri æquales abscissorum triangulorum ad peripheriam FEK pertingêt: sumpto igitur in ipsa quocunque puncto G, iungatur BG, & ducatur per G recta LGM ipsi AC æquidistans, axim secans in N, & erit LN æqualis NM, vnde LG minor GM; seceturergo GO ipsi LG æqualis, & agatur OI parallela ad BA, iungaturque IG, & producatur, quæ cum OI secet in I, alteram quoque parallelam BA secabit in H, eritque IG æqualis GH, sed anguli ad verticem IGO, HGL sunt æquales, ergo, & triangulum IGO triangulo HGL æquale erit, & communi addito trapetio BLGI, erit quadrilaterum BLOI æquale triangulo HBI, sed triangulum ABC maius est quadrilatero BLOI, totum sua parte, quare triangulum ABC erit quoque maius triangulo HBI, cuius diameter BG æqualis est axi BE trianguli ABC, & hoc semper de quolibet alio triangulo circa diametrum ipsi BE ęqualem; quare triangulum ABC est *MAXIMVM*. Quod erat primò, &c.

Sit præterea, in secunda figura, Hyperbole ABC, cuius centrum D, axis DBE, ex quo dempta sit BE, eique per E applicata AEC, & sit quælibet alia diameter DFG, ex qua sumatur FG ipsi BE æqualis, applicetur que HGI. Dico portionem ABC portione HFI maiorem esse.

Nam cum sit semi-axis DB semi-diametrorum *a MINIMA*, hæc erit maior DF, estque BE æqualis FG, quare DB ad BE minorem habebit rationem quàm DF ad FG: fiat ergo DF ad FL, vt DB ad BE, & habebit DF ad FL minorem rationem quàm DF ad FG, ideoque FL maior erit FG, si ergo per L applicetur MLN, quæ ipsi HGI æquidistet, erit a 24. h.

portio

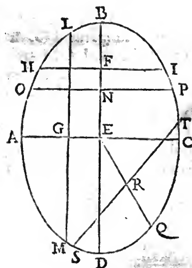
portio MFN maior portione HFI (totum sua parte) sed portio MFN æqualis [a] est portioni ABC (cum sit DF ad FL, vt DB ad BE) quare portio ABC erit maior HFI, & hoc semper de qualibet alia portione, cuius diameter æqualis sit axi BE: ergo portio ABC est *MAXIMA* portionum æqualium diametrorum. Quod erat vltimò demonstrandum.

a 40. h.

THEOR. XXX. PROP. XLIX.

MAXIMA portionum semi-Ellipsi minorum, & æqualium diametrorum est ea, cuius diameter sit minoris semi-axis segmentum. MINIMA verò, cuius diameter sit segmentum maioris semi-axis.

ESto ABCD Ellipsis, cuius axis maior sit BD, minor AC, centrum E, sitque ex minori semi-axe AE demptum segmentum AG, & ex maiori BE ipsi AG sit æquale BF perque puncta G, F applicatæ sint axibus rectæ LGM, HFI. Dico portionem LAM esse *MAXIMAM*, & HBI *MINIMAM* aliarum portionum eiusdem Ellipsis circa diametros ipsis AG, BF æquales.



Quod LAM sit maior HBI patet sic. Nam cum sit EA minor EB, AG verò æqualis BF, habebit EA ad AG minorem rationem quàm EB ad BF: fiat ergo EB ad BN, vt EA ad AG, & habebit EB ad BN minorem rationem quàm EB ad BF, siue BN erit maior BF; quare applicata ONP cadet infra HI: & cum sit vt EA ad AG, ita EB ad BN, erit portio LAM [b] æqualis portioni OBP, sed hæc maior est portione HBI, totum parte, ergo LAM maior est HBI.

b ibidem.

Præterea, ducta inter semi-axes quacunque semi-diametro EQ, ex ipsa, quæ maior est EA (eo quod hæc sit semi-diametrorum *MINIMA* [c]) & eò maior ipsa AG, dematur QR æqualis ipsi AG, vel BF, applicceturque SRT. Iam cum sit EA minor EQ, & AG æqualis QR, habebit EA ad AG minorem rationem, quàm EQ ad QR, ac ideò vti superiùs ostendimus, portio LAM erit maior portione SQT. Eadem ratione, cum sit EQ minor EB, (eò quod hæc sit [d] semi-diametrorum *MAXIMA*) & QR æqualis BF, habebit EQ ad QR minorem rationem quàm EB ad BF, quapropter portio SQT maior erit portione HBI, & hoc semper de qualibet portione, cuius diameter sit inter semi-axes; quare portio LAM erit *MAXIMA*, & HBI *MINIMA* portionum æqualium diametrorum. Quod erat demonstrandum.

c 86. primi huius.

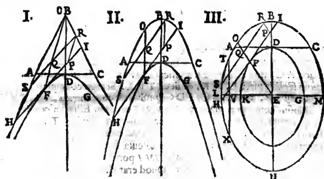
d ibidem.

THEO-

THEOR. XXXI. PROP. L.

MAXIMA portionum eiusdem anguli rectilinei, vel cuiuscunq; coni-sectionis, quarum bases sint æquales, est ea, cuius diameter sit segmentum axis, vel maioris semi-axis (respectiuè ad Ellipsim) datæ sectionis. MINIMA verò in Ellipsi est, cuius diameter sit segmentum minoris semi-axis.

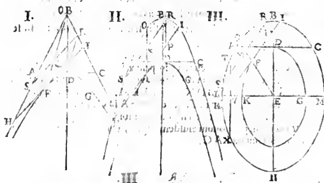
ESto A B C angulus rectilineus, vt in prima figura; vel Parabole, aut Hyperbole, vt in secunda; vel Ellipsis, vt in tertia, quarum axes sint B D, & in Ellipsi axis maior sit B D N, minor L K M, centrum E, atque maiori axi in quauis figura applicata sit quęcunque A D C. Dico primùm portionem A B C, quæ tamen in tertia figura sit minor semi-Ellipsi L B M, esse *MAXIMAM* omnium portionum eiusdem anguli, vel coni-sectionis, quarum bases æquales sint basi A C.



Nam, in prima figura, describatur per D in angulo asymptotali A B C Hyperbole F D G, in secunda verò, si A B C fuerit Parabole, describatur per D congruens Parabole F D G, vel si fuerit Hyperbole, describatur item per D, vti etiam in tertia, eiusdem nominis sectio F D G similis, & concentrica ipsi A B C, & tunc recta A D C continget omnino sectionem F D G in D; sumptoque in interiori sectione F D G quolibet puncto F, per ipsum ducatur sectionem contingens H F I exteriori occurrens in H I, deque ipsa abscindens portionem H O I, cuius diameter sit O F.

Iam, in singulis figuris, basis A C minor est basi H I, cum sit *a MINIMA* contingentium sectionem F D G, quare, & dimidium D C dimidio F I minus erit. Fiat ergo F P æqualis D C, & ex P agatur P R diametro F O æquidistans, cui ex R applicetur R Q S: patet ipsam R Q S ęquari basi A C, hoc est a 47. h.

hoc est portiones ABC, SOR esse æqualium basium, sed HOI maior est
a 45. h. SOR, totum parte, ergo, & ABC, quæ ipsi HOI a est æqualis, erit maior eadem SOR, & hoc semper, &c. vnde portio ABC est *MAXIMA* portionum æqualium basium. Quod primò erat, &c.



Præterea, cũ in tertia figura, quæ ex K ducitur interiorem Ellipsim FDG
b 47. h. contingens sit b *MAXIMA* eandem Ellipsim contingentium, ipsa erit omnino maior AC; quare eidem axi applicata, quæ ipsi AC sit æqualis, minorem axim secabit inter L, & K, & sit ea TVX. Si ergo concipiatur per V descripta Ellipsis, datis ABC, FDG similis, & concentrica, recta TVX
c ibidem. hanc Ellipsim continget, eritque c *MAXIMA* eandem Ellipsim contingentium, quapropter portiones, quarum bases sint æquales basi TVX, hanc mediam Ellipsim omnino secabunt, ac ideo maiores erunt portione TLX,
d 45. h. cum portiones ab ijsdem contingentibus abscissæ sint d omnes portioni TLX æquales. Quare portio TLX est *MINIMA* portionum æqualium basium, ex eadem Ellipsi ABC abscissarum. Quod erat vltimò demonstrandum.

COROLL.

Ex his constat *MINIMAM* portionum semi-Ellipsi maiorum, quarum bases sint æquales eam esse, cuius diameter sit segmentum maioris axis, *MAXIMAM* verò, cuius diameter sit segmentum minoris.

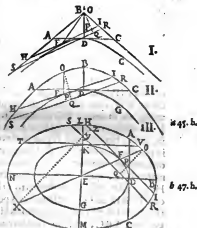
Nam in tertia figura, cum portionum ABC, SOR, TLX, &c. semi-Ellipsi minorum, & super æqualibus basibus, ipsa ABC sit *MAXIMA*, & TLX *MINIMA*, ac ipsæ sint portiones eiusdem terminatæ magnitudinis, siue Ellipsis eiusdem ABCN, patet reliquarum portionum semi-Ellipsi maiorum ANC, SNR, XMT, &c. quæ item sunt super æquales bases AC, SR, TX, portionem ANC esse *MINIMAM*, & XMT *MAXIMAM*.

THEO-

THEOR. XXXII. PROP. LI.

MINIMA portionum eiusdem anguli, vel cuiuslibet coni-sectionis, quarum altitudines sint æquales, est ea, cuius diameter sit segmentum maioris axis: in Ellipsi verò MAXIMA est, cuius diameter sit segmentum minoris axis.

ESto A B C, in prima figura, angulus rectilineus, vel in secunda, Parabole, aut Hyperbole, siue in tertia Ellipsis, quarum axes sint B D, at in Ellipsi axis maior sit B D N, minor L K; centrum E, atque axi B D in quauis figura applicata sit quælibet A D C. Dico portionem A B C, quæ in tertia figura sit, vel maior, vel minor semi-Ellipsi, esse *MINIMAM* omnium portionum eiusdem anguli, vel coni-sectionis, quarum altitudines sint æquales ipsi B D.



Descripta .n. per D, vel Hyperbola in prima figura, cuius asymptoti sint B A, B C; vel in reliquis figuris, descripta eiusdem nominis coni-sectione simili, & concentrica F D G, quę rectam A D C continget in D; sumatur in interiori sectione quodlibet aliud punctũ F, ad quod sit contingens H F I exteriori occurrens in H, I, atque portionẽ abscindens H O I, cuius diameter sit O F, altitudo verò sit O P.

Itaque cum portio H O I ęqualis [a] sit portioni A B C eiusdem sectionis, erit reciprocè basis H I ad basim A C, vt altitudo B D ad altitudinem O P, sed est H I maior A C, cum A C sit omnium [b] contingentium *MINIMA*; ergo, & B D erit maior O P: producatur ergo O P, & sumatur O Q ipsi B D æqualis, applicceturque S Q R contingenti H I æquidistans: eruntque portiones S O R, A B C æqualium altitudinum, sed est portio H O I minor S O R, pars suo toto, ergo, & portio A B C, quæ ipsi H O I est æqualis, minor erit portione S O R, & hoc semper, &c. Vnde portio A B C est *MINIMA* portionum eiusdem anguli, vel coni-sectionis, & æqualium altitudinum. Quod primò erat, &c.

a 45. h.
b 47. h.

Amplius in tertia figura esto recta V K T minori axi L M ordinatim applicata. Dico portionem V M T (quæ sit vel maior, vel minor semi-Ellipsi) cuius diameter, vel altitudo est M K, esse *MAXIMAM* portionum omnium, quarum altitudines ipsi M K sint æquales.

Descripta enim per K Ellipsi K D G simili, & concentrica datæ A B C N, quæ rectam V K T continget in K, sumptoque in eius peripheria quocunque puncto F, ducatur contingens H F I exteriori sectioni occurrens in H, I, deque ipsa abscindens portionem I X H, cuius diameter sit F X, altitudo verò sit X Z.

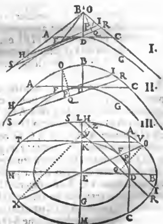
 Iam

a 45. h. Iam cum portio V M T æqualis sit [a] portioni I X H, erit basis V T ad basim I H reciprocè vt altitudo X Z ad altitudinem M K, sed est V T maior I H,
b 47. h. cum ipsa V T sit contingentium *b MAXIMA*, ergo, & X Z erit maior M K; facta igitur X Y æquali ipsi M K, applicataque S Y R, erunt portiones V M T, R X S æqualium altitudinum, sed est portio R X S minor portione I X H, pars suo toto, ergo ipsa R X S minor quoque erit portione V M T, & hoc semper, &c. Quare portio V M T est *MAXIMA* portionum eiusdem Ellipsis, & æqualium altitudinum. Quod erat vltimò demonstrandum.

SCHOLIVM.

Proxima quatuor præcedentia Theoremata, super hoc ipso Diagrammate, facilè simul, tanquam Consectaria demonstrabuntur, si tamen hæ tres conclusiones notatu dignæ præmittantur, à quibus ipsa ortum ducant. Nimirũ.

I. Inter diametros æqualium portionum eiusdem anguli, vel Hyperbolæ, aut Ellipsis, *MINIMA* est ea illius portionis, cuius diameter simul sit segmentũ axis dati anguli, vel Hyperbolæ: sed in Ellipsi, quæ sit segmentum minoris axis, & *MAXIMA*, quæ sit segmentum maioris.



c 45. h. Etenim in prima figura angulum exhibente, in portionibus A B C, H O I, quæ sunt *c* æquales, (eò quod ipsarum bases contingant eandem similem concẽtricam Hyperbolen interiorem) diameter B D, quæ est axis dati anguli, minor est diametro O F, cum sit B D
d 24. h. semi-transuersorum *d MINIMA*. Et in secunda, Hyperbolen repræsentante, in portionibus item A B C, H O I, quę ob eandem rationem æquales sunt, diameter B D, quæ est segmentum axis Hyperbolæ, minor est diametro O F, cum sit B D ad O F, vt semi-axis pertingens ad B ex centro exterioris Hyperbole, A B C, ad semi-transuersum pertingens ad O ex eodem centro, vt satis constat ex 44. huius, at semi-axis, minor est semi-transuerso, quare pater, &c. In tertia denique in portionibus T L V, H O I, A B C inter se pariter æqualibus, diameter L K portionis T L V, quæ est ex minori axe datæ Ellipsis, minor est diametro O F portionis H O I, atque minor diametro B D portionis A B C, & sic de singulis, quoniam E K ad K L est vt E F ad F O, & vt E D ad D B, estque antecedens E K minor
e ibidem. qualibet alia antecedentium, cum ea sit *e* semi-transuersorum *MINIMA*, & E D maior est ipsarum antecedentiũ, cum sit semi-trãsuersorum *MAXIMA*, quare & K L erit *MINIMA*, & D B *MAXIMA*, &c. idemque dicetur de æqualibus portionibus semi-Ellipsi maioribus. Verùm inter diametros æqualium portionum eiusdem Parabolæ non datur *MAXIMA*, cum omnes æquales sint.

2. Inter

2. INter bases æqualiũ portionum eiusdem anguli, vel coni-sectionis *MINIMA* est ea illius portionis, cuius diameter sit segmentum maioris axis, respectiuè ad Ellipsim: & *MAXIMA* eius, cuius diameter sit segmentum minoris.

In qualibet enim figura, basis A C portionis A B C, circa maiorem axim, *MINIMA* [a] est basium, aliarum æqualium portionum; & in Ellipsi basis V T portionis V L T circa minorem, *MAXIMA* est basium, reliquarum æqualium portionum, vel ipsæ simul sint semi-Ellipsi minores, vel simul maiores, &c. a 47. h.

3. INter altitudines æqualium portionum de eodem angulo, vel coni-sectione *MAXIMA* est ea illius portionis, cuius diameter sit segmentum maioris axis respectiuè ad Ellipsim, & *MINIMA* eius, cuius diameter sit segmẽtum minoris.

Id autem in superiori propositione ostensum fuit: nempe B D, quæ est altitudo portionis A B C, circa maiorem axim, maiorem esse O P altitudine ęqualis portionis H O I, atque ampliùs, in Ellipsi, altitudinem M K portionis T M V circa minorẽ axim, minorem esse altitudine X Z æqualis portionis HXI, &c.

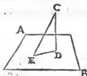
E' prima itaque harum conclusionum, elicitur veritas prop. 48. & 49. h. ex altera verò prop. 50. è tertia denique prop. 51. quæ omnia per se satis patent.

Sed hæc de planis, pro hac vice, dixisse sufficiat. Nonnulla sequuntur quæ iam diu pariter circa solida à coni-sectionibus genita excogitauimus. Noua omnia, ni fallor, omnia saltem geometrica: quæ si apertæ iucunditatis referta comperies amice Lector, reconditæ vtilitatis haud expertia esse aliquando te certiorem factum non dubito.

THEOR. XXXIII. PROP. LII.

Recta linea, quę à puncto extra planũ dato sit ipsi plano perpẽdicularis, MINIMA est rectarũ ab eodem pũcto ad idem planũ ducibiliũ.

SIt extra planum A B, punctum C, à quo ducta sit ipsi plano perpendicularis C D. Dico hanc esse *MINIMAM* ducibilium ex C ad alia puncta plani A B.



Sumatur vbicunque in dato plano aliud punctum E, iunganturque D E, C E. Et cum C D recta sit ad planum A B, erit [b] angulus C D E rectus, ideoque C E D acutus, siue minor C D E; quare C D minor erit C E, & hoc semper. Vnde C D est *MINIMA*, &c. Quod &c. b 3. def. vnd. Ele.

THEOR. XXXIV. PROP. LIII.

Si in Cono, vel Cylindro recto planum ductum per vnum laterum trianguli, vel rectanguli per axem eidem triangulo, vel rectangulo rectum fuerit, idem planum in ipso tantùm latere conicam, vel cylindricam superficiem continget, quæ tota cadet ad alteram partem plani contingentis.

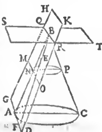
ESto in figura, (quę & Conum, & Cylindrum rectum exhibeat) planum per axẽ A B C, cui rectũ sit aliud planũ G D K H transiens per latus A B, cum

plano

plano basis Coni, vel Cylindri A C efficiens communem sectionem G A D. Dico ipsum planum G D K H, licet in infinitum extendatur, in vnico tantùm latere B A superficiem Conicam, vel Cylindricam contingere, ac propterea hanc totam cadere infra planum contingens.

Quoniam cum axis Coni, vel Cylindri recti sit perpendicularis plano basis, erit planum per axem B A C rectum basi A C, siue planum basis A C rectum plano per axem A B C, cui rectum quoque positum fuit planum per B A, A D ductum, quare G A D communis planorum sectio eidem plano per axem erit perpendicularis, [a] vnde angulus D A C rectus erit, sed est C A diameter circuli A C, quare G A D circuli peripheriam continget, ac tota cadet extra conicam, vel cylindricam superficiem.

a 19. vnd. Elem.



Iam per B axis verticem concipiatur ductum planum S T basi A C æquidistans, quod communem sectionem faciet cum plano G K rectam Q B R ipsi G A D [b] parallelam, abscindetque de plano G K vtrinque in infinitum extenso, partem Q R K H, quæ tota cadet supra planum S T ad oppositas partes conicæ, vel cylindricæ superficiei B A C (cum hæc tota cadat inter æquidistantia plana S T, A C, vt satis constat,) & partem Q R D G, quæ tota erit ad partes eiusdem superficiei. Sumatur ergo in plano Q R D G extra lineam B A, inter æquidistãtes Q R, G D quodlibet punctum E, & iuncta B E producatur: patet ipsam cum A D conuenire; (cum recta B E sit in eodem plano in quo sunt B A, & A D, & alteram parallelarum secet in B) conueniat in F, & cum punctum F sit extra solidi superficiem, ipsa quoque B F cadet tota extra [c] eandem, quare punctum E erit extra ipsam superficiem, & sic de quolibet alio puncto plani G R, quod sit extra latus B A, quapropter planum G R superficiem dati solidi contingit per rectam B A, ac ideo ipsa superficies cadit tota ad alteram partem plani G R. Quod erat, &c.

b 16. ibid.

c Coroll. primę primi Conic.

ALITER.

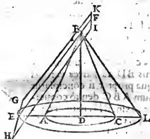
SI per quodcunque aliud punctum N lateris B A concipiatur duci planum secans Conum, vel Cylindrum, quod sit basi A C parallelum, ipsum in solidi superficie circuli peripheriam [d] describet; & in plano per axem rectam, seu diametrum N P, quæ ipsi A C [e] æquidistabit, in plano verò Q D rectam M N O, quæ item rectæ G A D erit parallela (cum sint communes sectiones æquidistantium planorum cum altero plano) eritque angulus O N P [f] æqualis angulo D A C, siue rectus; (cum superius demonstratum sit ipsum D A C rectum esse) hoc est recta M N O peripheriam N P continget in N, & ex vtraque parte cadet extra solidi superficiem, & hoc semper de qualibet alia ducta in plano B D ipsi G D æquidistante: quare totum planum G R, quod per latus B A ductum fuit rectum ad planum A B C per axem ductum, solidi superficiem contingit tantùm per latus B A: vnde ipsa superficies cadit tota ad alteram partem plani G R. Quod, &c.

d 4. primi Conic.
e 16. vnd. Elem.
f 10. ibid.

THEOR. XXXV. PROP. LIV.

Si Conus rectus plano per axem secetur, per in quo verticem ducta sit quędam linea, quę non in directum sit posita cum aliquo laterum trianguli per axem perque ipsam agatur planum, quod rectum sit ad idem planum, per axem ductum: Huiusmodi planum in ipso tantùm vertice coni superficiem continget, quæ tota cadet ad alteram partem ducti plani.

SIt conus rectus A B C plano per axem B D sectus efficiente triangulum A B C, in cuius plano, & per verticem B sit quælibet linea E B F, non tamen cum aliquo laterum B A, B C sit in directũ posita, per quam transeat planum G H I K, quod ad planum per axem A B C sit rectum. Dico tale planum G I in nullo alio puncto, quàm in vertice B conicam superficiem contingere, &c.



Quoniam si recta E B F ęquidistat ipsi A C basi trianguli per axem, anguli interiores E B D, A D B duobus rectis æquales erunt, sed A D B rectus est, cum sit axis B D plano basis A C perpendicularis, quare, & angulus E B D rectus erit, sed planum A B C ponitur rectum ad planum G I, & in eo ad communem horum sectionem E B F ducta est perpendicularis D B, ergo ipsa D B erit [a] recta ad planum G I, estque eadem B D recta ad planum basis A C, quare duo plana G I, A C inter se [b] æquidistant, atque est punctum B in vno plano G I, & circuli peripheria A C in altero A C, ergo recta B A, quæ manente puncto B circa peripheriam C A circumducitur conicam superficiem describens, hoc est ipsa conica superficies tota cadet inter plana ęquidistantia (vbicunque enim ducatur planum per axem, habentur communes æquidistantium planorum sectiones inter se parallelę, inter quas cadit communis sectio secantis plani cum superficie) ac ideò planum G I in ipso tantùm vertice B, coni superficiem continget.

[a] 4. defin. vndec. Elem.

[b] 14. vnd. Elem.

Si verò recta F B E conueniet cum C A, vt in E, patet, dum triangulum B E D circa axim B D conuerti concipitur, rectam B E coni B E L superficiem describere, cuius triangulum per axem est B E L idem cum plano A B C, cui rectum est planum G I ductum per latus B E, quare idem planum G I continget conicam B E L in ipso tantùm [c] latere B E, sed latus B E contingit conicam B C in vnico tantùm vertice B, ergo planum G I conicam A B C in ipso tantùm vertice B contingit, ac propterea ipsa coni superficies cadit tota infra planum G I. Quod erat demonstrandum.

[c] 53. h.

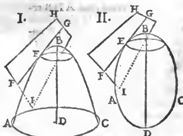
THEO-

THEOR. XXXIV. PROP. LV.

Si rectum Conoides Parabolicum, vel Hyperbolicum, aut Sphæra, aut Sphæroides rectum plano per axem secetur, & communem sectionem plani secantis cum solidi superficie quædam recta linea in puncto contingat, per quam ductum sit aliud planum, quod rectum sit ei per axem ducto: huiusmodi planum in prædicto tantùm puncto solidi superficiem continget, ipsaque superficies cadet tota ad alteram partem plani contingentis.

ESto rectum Conoides Parabolicum, vel Hyperbolicum, vt in prima figura; vel Sphæra, aut Sphæroides rectum, vt in secunda, plano per axem BD sectum efficiente in solidi superficie sectionem ABC, (quæ erit genitrix [a] dati solidi) & per punctum E in ipsa sumptum, sit ei contingens linea FEG, per quam concipiatur duci planum HI, quod sit rectum plano per axem ABC: dico huiusmodi planum HI in ipso tantùm puncto E conuexam solidi superficiem contingere, atque hanc totam cadere infra planum HI.

[a] ex comment. Cómand. in lib. Arch. de Conoi. & Sphær.



Cum enim recta FEG sectionem ABC cõtingat, producta conueniet [b] cum axe sectionis BD ad partes verticis B; qua propter si concipiatur planum ABC denuò conuerti circa axim BD, patet sectionem ABC, dati solidi, & cõtingentem FEG, coni superficiem describere, quæ conuexam solidi superficiem per circuli tantùm peripheriam à puncto E descriptam contingет (cum punctum E sit tum in contingente, tum in ipsa sectione, & in reuolutione peripheriam circuli designet, ac reliqua puncta rectæ FG sint extra sectionem ABC.) Et quoniam planum HI per contingentem FG ductum, positum fuit rectum ad planum per axem ABC, quod est idem, ac planum per axem coni à latere FG descripti, ergo planum HI secundùm latus tantùm FG conicam superficiem continget, [c] sed latus FG conuexam solidi superficiem contingit tantùm in puncto E, quare planum HI in vnico puncto E solidi superficiem contingit, ac ideò hæc cadit tota infra planum HI. Quod probandum erat.

[b] 24. 25. pr. conic.

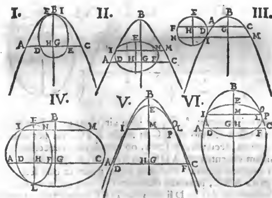
[c] 53. h.

THEO-

THEOR. XXXVII. PROP. LVI.

Si coni-sectio, vel circulus coni-sectionem, vel circulum intus, vel extra, in vno, aut in duobus punctis contingat, & harum sectionum axes, vel sibi mutuò congruant, vel æquidistent, vtraque autem figura, altera immota, circa proprium axem conuertatur. Solidum factum ab vna sectionum nunquam secabit solidum ab altera genitum, sed omnino se mutuò contingent, vel in vnico puncto, si figurarum planarum contactus fuerit tantùm in puncto, siue axes congruant, siue æquidistent; vel in duobus tantùm, si ad duo puncta se mutuò contingant, dum axes sint paralleli; vel denique ad integram circuli peripheriam à contactibus genitam, si ad duo puncta sectiones simul occurrant, dum axes simul congruant.

Sint duæ coni-sectiones A B C, D E F, quarum axes sint B G, E H, & vel simul congruant, vt in prima, quinta, & sexta figura, vel inter se æquidistent, vt in secunda, tertia, & quarta, atque se mutuò contingant, vel

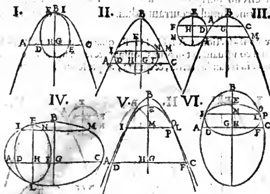


in vnico puncto I, vt in prima, secunda, & tertia, vel in duobus tantùm I L, vt in quarta, quinta, & sexta; & concipiatur modò figurā A B C, manente alia D E F, circa axim B G conuerti; modò figurā D E F, manente altera, ita vt ab ipsis solida conoidalia, sphærica, aut sphæroidalia describantur. Dico talia solida nunquam simul secari, sed vel in vnico puncto I, in quo plana se contingunt, se quoque mutuò contingere in prima, secunda, & tertia, vel in duobus tantùm I, L, in quarta vbi axes B G, E H inter

 se æqui-

se æquidistant: vel tandem ad integram circuli peripheriam à contactibus I, L in figurarum reuolutione descriptam in quinta, & sexta vbi axes simul congruunt.

Cum enim harum sectionum axes, vel congruant simul, vel æquidistent, quæ ad vnum ipsorum plana ducentur erecta, alteri quoque erecta erunt, describentque circulos in proprijs solidis, quorum centra in ipsis axibus cadent: vnde cum axes simul congruent, vt in prima, quinta, & sexta, huiusmodi circuli erunt concentrici; at si æquidistent, vt in reliquis, circuli erunt eccentrici, & communes sectiones horum planorum cum ipsis sectionibus ABC, DEF erunt eorundem circulorum diametri; quare ducto quocunque plano ADFC ad axes erecto, non per contactus I, vel L transeunte, efficiente verò in sectione ABC diametrum AC, in sectione autem DEF diametrum DF: patet in prima, secunda, quarta, quinta, & sexta figura, in quibus sectio DEF inscripta est sectioni ABC diametrum DF totam



cadere intra diametrum AC, ac ideo circulum ex DF insolido DEF disiunctum esse à circulo ex AC in solido ABC, vel per armillam ADC, vt in prima, secunda, & sexta, ob circulorum concentricitatem, vel per armillam excentricam ADC, in secunda, & quarta ob ipsorum circulorum excentricitatem. Rursus in tertia figura in qua sectio DEF tota cadit extra ABC, prædicta diameter DF tota cadet extra diametrum AC, ideoque circulus ex DF in solido DEF totus cadet extra circulum ex AC in solido ABC, & hoc semper: quare in singulis figuris vbicunque ductum sit planum ADFC, præter ad contactus, huiusmodi solida erunt in totum disiuncta, ex quo nullibi se mutuò secabunt.

Præterea cum in prima figura sectionum contactus sit in ipso axium vertice, patet, & solida circa communem axim ab ipsis sectionibus genita in eodem puncto se mutuò contingere. In secunda verò tertia, & quarta ducto plano ad axes erecto per punctum contactus I, in solido ABC efficiens circulum, cuius diameter sit IM, at in solido DEF circulum, cuius diame-

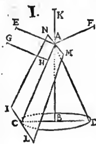
ter sit

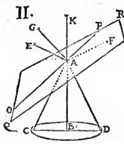
ter sit IN; patet tales circulos in ipso puncto I se mutuò contingere, ideoque, & solida in eodem contactus puncto I se tantùm contingere, & ob eandem rationẽ in quarta figura in altero contactus puncto L se contingent, &c. At in quinta, & sexta, in quibus sectiones sunt circa communem axim BG, & in duobus punctis I, L se contingunt, si ex contactu I ducatur communis applicata IM, & producatur, ipsa ad alterum contactus punctum L omnino pertinget; quoniam producta IM vtranquẽ sectionem secans in O, P, est semi-applicata IM, in sectione ABC, æqualis semi-applicatæ IM, in sectione DEF, sed est MO in sectione ABC æqualis IM, & MP in sectione DEF æqualis eidem IM, ergo MO, MP sunt æquales, hoc est puncta O, P vnum, ac idem sunt; quare sectiones in puncto P simul conueniunt, sed conueniunt quoque in I, & in duobus tantùm punctis I, & L positum fuit eas simul occurrere, ergo punctum P idem est, ac punctum contactus L: quare IML est communis sectionum applicata, per quam si ducatur planum ad axem erectum, efficiet in vtroque solido circulum, cuius diameter *a* erit eadem IL; itaque per huius circuli peripheriam à puncto I ex sectionum reuolutione descriptam, huiusmodi solida se cõtingent. Quod erat vltimò demonstrandum. *a* ex Command.cõment. in lib. Arch. de Conoid.

PROBL. VIII. PROP. LVII.

A puncto extra conum rectum dato ad eius conuexam superficiem, MINIMAM rectam lineam ducere.

ESto conus rectus, cuius axis AB. Oportet per punctum G datum extra conum ad eius conuexam superficiem *MINIMAM* rectam lineam ducere.

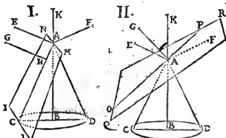




Secetur conus, in vtraque figura, plano per axem AB, ac per datum punctum G transeunte, quod efficiat in superficie triangulum CAD: producatur axis BA in K; & cum anguli CAB, DAB sint æquales, & acuti, qui ipsis deinceps sunt CAK, DAK erunt æquales, & obtusi. Fiant igitur ex vertice A anguli CAE, DAF recti, & primò sit datum punctum G in prima figura in altero rectorum angulorum, vt puta in ipso CAE, demittaturque ex G recta GH perpendicularis lateri AC (quæ, vt patet *MINIMA* est ad anguli latera, &c.) Dico ipsam GH esse *MINIMAM* quæsitam.

Concipiatur enim per rectam AC duci planum NHM, quod rectum sit ad planum per axem DAC, in quo est recta GH.

Iam cum planum N L rectum sit ad planum D A C, cumque in plano N L sit G H communi planorum sectioni A C perpendicularis, erit ipsa G H
a 4. def. 11. Elem. ad idem planum N L recta [a] hoc est *MINIMA* [b] ducibilium à puncto G ad
b 52. h. quodcunque aliud punctum eiusdem plani N L, sed conuexa coni superfi-
c 53. h. cies tota est infra planum N L, ipsum tantùm contingens [c] per rectam A C, quare eadem G H eò ampliùs *MINIMA* erit ad conuexam dati coni recti C A B superficiem.



Si autem datum punctum fuerit in ipsa perpendiculari E A, vt in E, eodem modo demonstrabitur E A rectam esse ad planũ N L, ideoque ad ipsum *MINIMAM*, & eò magis ad coni superficiem.

Si denique datum punctum G fuerit intra angulum E A F, vt in secunda figura. Iungatur G A, & hæc erit *MINIMA* quæsita.

Nam cũ angulus C A G sit maior recto, in plano per axem D A C, in quo est A G, fiat rectus angulus O A G, & linea O A producatur ad P: patet A P cadere inter A G, & A D cum angulus G A P sit rectus, & duo simul G A F, F A D recto sint maiores; (est .n. vnicus D A F rectus, ex constructione) itaque si per rectam O P concipiatur planum Q R, quod rectum sit ad planum D A C, in quo est A G, ob rationem superiùs allatam, ipsa G A recta erit
d 52. h. ad planum Q R, hoc est *MINIMA*, [d] sed planum Q R in ipso tantùm verti-
ce A coni superficiem contingit, [e] quæ tota cadit ad inferiorem partem pla-
e 54. h. ni Q R, quare eadem G A erit *MINIMA* ducibilium ex G ad conuexam coni superficiem. Ducta est ergo à puncto G extra conum rectum dato, &c. Quod faciendum erat.

PROBL. IX. PROP. LVIII.

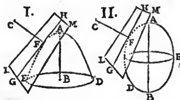
A puncto extra Conoides Parabolicum, aut Hyperbolicum, vel Sphæram, aut Sphæroides dato, ad eius conuexam superficiem MINIMAM rectam lineam ducere.

Esto Conoides Parabolicũ, aut Hyperbolicũ, in 1. figura, vel Sphęra, aut Sphęroides in secunda, cuius axis A B, & oporteat per pũctum C extra datum ad conuexam solidi superficiem *MINIMAM* rectam lineam ducere.

Secetur datum solidum plano per axem A B, ac per datum punctum C, efficiente in superficie genitricem solidi sectionem D A E, ad cuius peri-
f 20. 22. 23. h. pheriam ex puncto C ducatur [f] *MINIMA* linea C F. Dico hanc quoque esse *MINIMAM* ad conuexam dati solidi superficiem.

Ducatur

Ducatur enim in plano secante D A E, per punctum F sectionem contingens G F H, quæ, (vti elicitur ex propositionibus 20. 22. ac 23. huius) cum *MINIMA* C F rectos angulos efficiet. Concipiatur denique per contingentem G H, ductum planũ L M, quod ad planum D A E, in quo iam ponitur esse G F, rectum sit. Cum ergo plana L M, D A E, se mutuò secent per rectam G H, cui in plano D A E ducta est perpendicularis C F, erit ipsa C F, *a* recta quoque ad planum L M, siue ad idem planum ex puncto C erit *b* *MINIMA*; sed planum L M conuexam solidi superficiem contingit in puncto tantùm F, quę cadit *c* tota infra idem planum, ergo recta C F eò magis est *MINIMA* ad conuexam solidi superficiem D A E. Quod erat, &c.



a 4. def. 11. Elem.
b 52. h.
c 55. h.

PROBL. X. PROP. LIX.

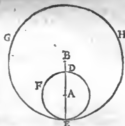
A puncto non intra sphæram dato, ad eius superficiem, MAXIMAM rectam lineam ducere.

SIt data sphæra, cuius centrum A, & oporteat per punctum B non intra sphæram datum, ad eius superficiẽ, *MAXIMAM* rectam lineam ducere.

Iungatur B A, & producatur, donec sphæricæ superficiei occurrat in D, & E. Dico B E, in qua est centrum, esse *MAXIMAM*.

Concipiatur per B E ductum planum, quod in spæræ superficie maximum circulum designabit D F E, ad cuius peripheriam est recta B E *MAXIMA*.

Iam in plano circuli D F E, cum radio B E descripto circulo G E H, & circa immotum axim B E reuoluto, ab ipso describetur sphæra G E H, quæ datam sphæram D F E circa eundem axim descriptam comprehendet, ac se simul contingẽt in ipso *d* circulorum contactu E, sed quæ à centro B ad sphæricam superficiem G E H ducuntur omnes sunt æquales rectæ B E, ergo quæ ab eodem puncto B ad interioris sphæræ D F E superficiem ducentur ipsa B E minores erunt. Vnde B E est *MAXIMA* quæsita, &c. Quod erat, &c.



d 56. h.

PRO-

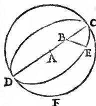
PROBL. XI. PROP. LX.

A puncto intra sphæram dato, ad eius concauam superficiem, MAXIMAM, & MINIMAM rectam lineam ducere.

ESto sphæra, cuius centrum A, & oporteat per datum intra ipsam punctum B ad concauam sphæræ superficiem *MAXIMAM*, & *MINIMAM* rectam lineam ducere.

Si punctum B fuerit in centro sphæræ, patet tunc neque *MAXIMAM*, neque *MINIMAM* dari, cum omnes eductæ à centro ad sphærę superficiem sint æquales.

Si autem datum punctum fuerit præter centrum: iungatur cum centro A recta B A, quæ hinc inde producta occurrat sphęricæ superficiei in punctis C, D. Dico BD, in quà est centrum, esse *MAXIMAM*, reliquam BC *MINIMAM*.



Si enim circà axim CD intelligatur quicunque *MAXIMVS* sphæræ circulus C D F: patet linearum ex B ad peripheriam C D F ducibilium, B D in qua centrum A, esse *MAXIMAM*, & B C *MINIMAM*.

Si verò ducta sit quælibet alia B E extra peripheriam C D F, sphæricæ superficiei occurrens in E; per rectas C D, & B E intelligatur planum, cuius communis sectio cum sphæræ superficie erit cuiusdam *MAXIMI* circuli peripheria C E D, & eius diameter C D: quare B D, in qua est centrum, cum sit *MAXIMA*, erit maior B E; & B C, cum sit *MINIMA* minor erit eadem B E, & hoc semper vbicunque pertingat ducta B E: ideoque B D est *MAXIMA* ad vniuersam sphæræ superficiem ducibilium ex dato puncto B, & B C *MINIMA*. Quod erat faciendum.

PROBL. XII. PROP. LXI.

A puncto intra Conum rectum, vel Conoides Parabolicum, aut Hyperbolicum dato, ad eius concauam superficiem, MINIMAM rectam lineam ducere.

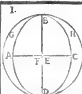
ESto Conus rectus; vt in prima figura, vel Conoides Parabolicum, aut Hyperbolicum, vt in secunda, cuius axis A B, & oporteat per punctum intra ipsum datum ad concauam solidi superficiem *MINIMAM* rectam lineam ducere.

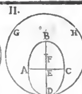
Secetur solidum plano per axem A B, ac per datum punctum ducto efficiente in solidi superficie sectionem D A E, quæ eadem erit, *a* ac ipsius solidi genitrix sectio, & in Cono angulum rectilineum constituet.

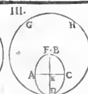
a ex Comment. Cómand. in 12. Arch. de Conoid. & Spheroid.

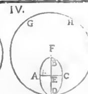
Iam si datum punctum fuerit in axe, vt in H; ducta H D, quæ in sectione

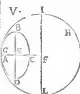
Schematismus 4. pro Prop: 62. Lib. II. ad pag. 79.

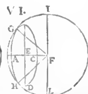


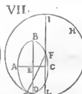


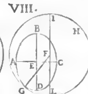


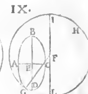


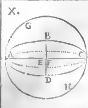


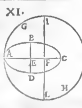


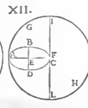


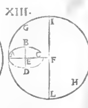


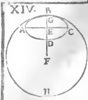


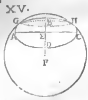



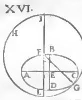




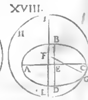


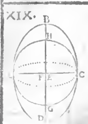


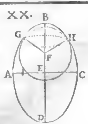


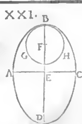


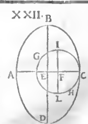


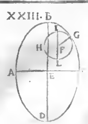


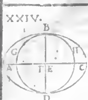


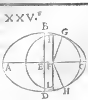


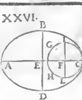


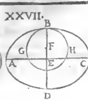


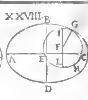






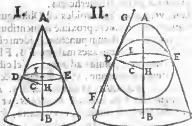






ctione D A E sit *MINIMA*, (sed quæ in angulo, primæ figuræ, erit perpendicularis ad A D) ipsa H D erit quoque *MINIMA* in solido.

Nam si H D est *MINIMA* ad peripheriam D A E patet ex 20. 22. ac 23. huius, ipsam H D perpendicularem esse rectæ F D G, quæ ad punctum D sectionem contingat. Si ergo centro H, interuallo H D circulus describatur [a] D E B, ipse cadet totus intra sectionem, eam contingens tantùm in duobus punctis D E: quare in reuolutione sectionis D A B circa axim A B



a 92. primi huius.

describetur datum solidum, & à circulo sphæra, quæ tota cadet intra solidum, eius concauam superficiem contingens [b] tantùm per peripheriam D I E eius circuli, qui in reuolutione describitur à puncto D; & ipsa H D, vna cum qualibet alia eductarum ab H ad prædictam peripheriam D I E, erit *MINIMA* in solido quæsita; cum hæ omnes sint æquales inter se, eò quod sint latera Coni recti, cuius basis est circulus D I E, vertex H; cumque omnes aliæ eductæ ab H ad solidi superficiem, occurrant priùs sphæricæ superficiei (quæ cadit tota intra solidi superficiem) quàm superficiei conicæ, aut dati solidi conoidalis. b 56. h.

Si verò datum punctum sit C inter axem, & sectionem: ducta item C D, quæ in sectione sit [c] *MINIMA*. Dico ipsam quoque esse *MINIMAM* in solido. c 20 22. 23. h.

Cum enim C D sit *MINIMA* ad sectionis peripheriam D A E, ipsa C D erit contingenti F D G perpendicularis, quare, & producta axi [d] occurret, vt in H: quo facto centro, ac interuallo H D descripto circulo D E B, & facta reuolutione circa axim A B, procreabitur denuo datum solidum, & sphæra, cuius superficies cadet tota intra [e] solidi superficiem, sed recta C D est *MINIMA* [f] à puncto C ad sphæræ superficiem eductarũ; quare ipsa C D est omnino *MINIMA* ex C ducibilium ad concauam, & exteriorem solidi superficiem. Quod facere oportebat. d 88. pr. h. e 56. h. f ex 60. h.

PROBL. XIII. PROP. LXII.

A puncto vbicunque dato, ad Sphæroidis superficiem, MAXIMAM, & MINIMAM rectam lineam ducere. Schematismus 4.

Esto datum Sphæroides A B C D, cuius axis reuolutionis sit B D, centrum E, & punctum datum sit F. Oportet primò ex F ad Sphæroidis superficiem *MAXIMAM* rectam lineam ducere.

Pro huius lineæ indagatione, generalis constructio in singulis figuris quarti Schematismi, talis est.

Secetur Sphæroides A B C D plano per axem B D, ac per datum punctum F

ctum F ducto, sectionem efficiens in solido figuram A B C D, quæ semper est eadem, ac Ellipsis quæ solidum genuit; & à dato puncto F ad huius sectionis peripheriam ducatur [a] *MAXIMA* linea: Dico ipsam quoque esse *MAXIMAM* ad solidi superficiem.

a 23. h.

Iam, vel datum Sphæroides est Oblongum, vt in 9. primis figuris; vel Prolatum, vt in totidem proximè sequentibus.

Si primum: vel datum punctum F idem est cum centro E, vt in prima figura, & tunc duo semi-axes maiores F B, F D erunt *MAXIMAE* ad Ellipsis peripheriam per 23. huius ad num. 1. Vel est in maiori axe B D, hoc est inter verticem, & centrum, vt in secunda, & tunc F D tantùm, in qua est centrum est *MAXIMA*, vt ad num. 4. & 5. Aut in ipso vertice B, vt in tertia, quo in casu F B, item est *MAXIMA*, vt ad num. 2. Vel in ipso maiori axe, extra tamen sectionem, vt in quarta, & tunc ipsa F D, in qua est centrum pariter est *MAXIMA*, vt ad num. 3. Vel est in minori axe A C, hoc est, vel distans à vertice A per interuallum F A non minus dimidio recti, cuius transuersum est A C, vt in quinta figura, & tunc ipsa F A est *MAXIMA*, vt ad num. 6. Aut distat ab A per interuallum minus prædicto dimidio, vt in sexta figura, & sic duæ tantùm F H, F G sunt *MAXIMAE*, vt ad num. 7. Vel denique datum punctum F est inter axes, & hoc, vel in ipsa peripheria, vt in septima figura, vel intra, vt in octaua, vel extra, vt in nona, atque in his casibus vna tantùm duci potest ex F *MAXIMA*, vt ad num. 9. quæ sit F G.

Si autem Sphæroides fuerit Prolatum, vt in nouem proximis figuris eiusdem Schematismi, vel datum punctū est idem cum centro F, vt in 10. figura, & tunc duo semi-axes maiores F A, F C erunt *MAXIMAE* ad Ellipsis peripheriam. Vel est in maiori axe, & hoc vel inter centrum, & verticem C, vt in vndecima, vel in ipso vertice, vt in duodecima, vel extra verticem vt in decimatertia, quibus in casibus F A, in qua centrum, est *MAXIMA*. Vel est in minori axe distans à vertice B per interuallum non minus dimidio recti, cuius transuersum sit B D, vt in decima quarta figura, & tunc F B, vel F G est *MAXIMA*, vel distans à vertice B per interuallum minus prædicto dimidio, vt in decimaquinta, & tunc duæ sunt *MAXIMAE* F G, F H. Vel est inter axes, & hoc aut in ipsa peripheria, aut intra, aut extra, vt in 16. 17. & 18. in quibus vna tantùm F G est *MAXIMA*, quæ omnia ad præcitatos numeros propos. 23. huius sunt demonstrata. Si ergo in singulis figuris ad interuallum *MAXIMAE* repertæ F D, vel F G respectiuè, cum centro dati puncti F circulus describatur, ipse cadet totus extra Ellipsim, hanc tantùm contingens in eò puncto, vel in ijs duobus ad quę *MAXIMA*, vel *MAXIMAE* perueniunt; nam si circulus alibi cum Ellipsi conueniret *MAXIMAE* quoq; plures essent quàm vna, vel duæ respectiuè, quod est contra ostensa in 23. huius.

Præterea, vbi F centrum descripti circuli G H non est in B D axe reuolutionis Ellipsis A B C D, vti reperitur in 1. 2. 3. 4. 10. 14. ac 15. figura, in quibus eadem B D est circuli diameter, ducatur I F L diameter circuli G H, atque axi B D ęquidistans; & concipiatur, modo circulum circa diametrum I L, tanquam circa axim conuerti, interea manente Ellipsi, & fiet sphæra G H, modò Ellipsim circa axim B D, manente tamen circulo, & procreabitur Sphæroides A B C D, quod cadet totum intra sphæram, hanc [b] tantùm contingens,

b 56. h.

ad vnicum punctum D, aut G, vt in 2. 3. 4. 5. 7. 8. 9. 11. 12. 13. 14. 16. 17. ac 18. figura, quoniam in his quoque vnicus est contactus inter circulũ, & Ellipsim; vel ad duo tantùm puncta B, D, vt in prima, aut G, H, vt in sexta, in quot circulus Ellipsim contingit, & quæ non sunt extrema eiusdem applicatæ in vtraq; sectione ad communem axim; vel tandem ad integram circuli peripheriam à puncto A in decima figura, vel à puncto G in 15. ex figurarum reuolutione circa communem axim BD descriptam. Cum ergo Sphæra GH claudat Sphæroides ABCD, atque ipsum contingat tantùm, vel in vno, vel in duobus punctis, vel ad integram circuli peripheriam, cũq; omnes rectæ, quæ à centro F ad punctum sphæricæ superficiei duci possunt sint æquales ijs, quæ ad prædicta contactuum pũcta, vel peripherias ducuntur, ideò quæ ab eodem centro ad inclusam Sphæroidis superficiem, præter ad prædicta puncta, vel peripherias ducentur minores erunt, ac propterea ipsæ eductæ à centro F, siue à puncto dato ad prędicta puncta, vel peripherias in Sphæroidis superficie erunt *MAXIMAE* quæsitæ. Quod erat primò faciendum.

SI verò ad Sphæroidis superficiem ABCD ducenda sit *MINIMA* lineà à puncto dato F. Vel datum punctum est in ipsa superficie, & tunc *MINIMA* in punctum abit. Vel cadit extra, & tunc *MINIMA* reperitur, vt in 58. huius. Vel tandem est intra Sphæroides, & tunc ad *MINIMAM* venandam generalis constructio est huiusmodi.

Secetur Sphæroides plano per axem BD, & per datum punctum F, genitricem Ellipsim efficiente ABCD, ductaque ex F ad Ellipsis peripheriam *MINIMA* * recta linea, ipsa quoque erit *MINIMA* ad Sphæroidis superficiẽ.

Iam, vel datum Sphæroides est Oblongum, vel Prolatum. Sit primò Oblongum, vt in figuris 19. 20. 21. 22. 23. Itaque datum punctum F, vel est in centro, vt in 19. & tunc duæ FA, FC, sunt *MINIMAE*, vel in maiori axe AB distans à vertice B per interuallum maius dimidio recti, &c. itemque duæ FG, FH sunt *MINIMAE*, vt in 20. vel per interuallum non maius prædicto dimidio, vt in 21. & tunc vnica FB, in qua non est centrũ, est *MINIMA*; vel est in minori axe, vt in 22. in qua FC vbi centrum non reperitur est *MINIMA*; vel tandem est inter axes, vt in 23. & tunc vnica FG est *MINIMA*, &c. * 23. h.

Sit denique Sphæroides Prolatum, vt in postremis figuris huius quarti Schematismi. Si punctum F congruit cum centro E, vt in 24. figura duæ FD, FB sunt *MINIMAE*; si est in semi-axe maiori EC, distans à C per interuallum maius recti dimidio, &c. vt in 25. duo item FG, FH sunt *MINIMAE*; si per interuallum non maius prædicto dimidio, vt in 26. vnica FC est *MINIMA*; si in semi-axe minori EB, vt in 27. ipsa FB, in qua non est centrum est *MINIMA*; si tandem inter axes, vt in 28. vnica FG est *MINIMA*, quæ omnia in prop. 23. huius sunt demonstrata.

Si ergo in his omnibus figuris cum centro F, ad interuallum nuper inuentæ *MINIMAE* describatur circulus GH, ipse circumscriptus erit Ellipsi, hanc tantùm contingens in eo, vel in ijs punctis, ad quæ *MINIMA*, vel *MINIMAE* perueniunt; nam si alibi cum Ellipsi conuenirent, *MINIMAE* plures essent, quàm esse possint. Itaque in circulis figurarum 22. 23. 25. 26.

28. in quibus eorum centra non sunt in BD axe reuolutionis Ellipsis, prout sunt in reliquis, ducatur per centrum F diameter IL eidem axi BD æquidistans, & concipiatur, tum circulum, tum Ellipsim conuerti eadem arte, qua superiùs vsi sumus, non absimili ratiocinatione, atque ope 56. huius, ostendetur inclusam Sphæram Sphæroides contingere, vel in vnico puncto, vt euenit in 21. 22. 23. 26. 27. ac 28. vel in duobus tantùm, vt in 24. & 25. vel ad integram circuli peripheriam, vt in 19. & 20. ideoque omnes rectas, quæ à centro F ad puncta Sphæricæ superficiei ducuntur, æquales esse ijs, quæ ad prædicta contactuum puncta, vel ad peripherias ducuntur, ac propterea, quæ ad circumscriptam Sphæroidis superficiem, præter ad eadem puncta, vel peripherias ducentur, maiores erunt. Vnde ipsæ eductæ, à dato puncto F ad reperta contactuum puncta, vel ad peripherias super dati Sphæroidis superficiem erunt *MINIMAE*. Quod vltimò faciendum erat.

MONITVM.

Miraberis fortassè, ac non immeritò, proximas hasce quinque propositiones circa planas portiones versantes, & immediatè post quadragesimam quintam huius aptè apponendas, locum hunc inter solida sortitas fuisse: sed inuitam, vel fortuitam potiùs huius transmissionis causam, hìc tibi enarrare superuacaneum puto. His itaque vtaris prout suo loco insertis; nulla namque ipsarum indiget aliqua præcedentium vsque ad num. 46. inclusiuè, licet sola quinquagesima prima nonnullarum sequentium notionem assumat.

THEOR. XXXVIII. PROP. LXIII.

Conuersum Prop. 40. h.

Æquales portiones eiusdem coni-sectionis, vel circuli, si fuerint de eadem Parabola habebunt intercepta diametrorum segmenta inter se æqualia. Si de eadem Hyperbola, vel Ellipsi, vel circulo, prædicta diametrorum segmenta erunt proprijs semi-diametris proportionalia.

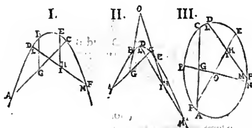
SInt, in quacunque harum figurarum, duæ portiones ABC, DEF inter se æquales, quæ in sectione Ellipsis tertiæ figuræ sint primò minores semi-Ellipsi, & harum omnium segmenta diametrorum sint BG, EH, tùm in Parabola primæ figuræ, tùm in reliquis, quarum centrum sit O. Dico, in prima, segmenta EH, BG inter se æqualia esse, in reliquis verò, esse vt HE ad EO, ita GB ad BO.

Ex altera diametrorum, vtputa ex EH, secetur, in prima figura, EI æqualis segmento BG; & in reliquis, fiat OE ad EI, vt OB ad BG, atq; in omnibus ordinatim applicetur per I ipsi diametro EI recta LIM, quæ

rectæ

rectæ DHF æquidiſtabit, cum & hæc quoque ſit eidem diametro ordinatim ducta.

Iam in ſingulis figuris erit portio LEM æqualis [a] portioni ABC, ſed eſt quoque portio DEF eidem portioni ABC æqualis, ex hypotheſi, quare duæ portiones LEM, DEF inter ſe æquales erunt, ſed vtraque eſt de eadem ſectione, & circa communem diametrum EHI, & ſuper baſes parallelas, ergo baſis LIM tota congruet cum baſi DHF, vnde & punctum I cum puncto H; quare ſegmenta EI, EH inter ſe æqualia erunt, ac propterea erit, in prima, ſegmentum quoque EH æquale BG, & in reliquis erit HE ad EO, vt GB ad BO. Quod primò oſtendere proponebatur. a 40. h.



Sint iam in tertia figura duæ portiones æquales ANC, DPF ſemi-Ellipſi maiores, quarum ſegmenta diametrorum ſint GN, HP, & commune centrum O. Dico item eſſe GN ad NO, vt HP ad PO.

Producantur diametri NG, PH, ad B, E.

Et cum portiones ANC, DPF ſint æquales, & ſemi-Ellipſi maiores erunt quoque reliquæ ABC, DEF de eadem Ellipſi inter ſe æquales, ſed ſemi-Ellipſi minores; quare erit, vt ſupra oſtendimus, GB ad BO, vt HE ad EO, & conuertendo, & diuidendo OG ad GB, vt OH ad HE, & eſt GB ad BO, vel ad ON, vt HE ad EO, vel ad OP, ergo, ex æquali GO ad ON, vt HO ad OP, & componendo, GN ad NO, vt HP ad PO. Quod vltimò erat, &c.

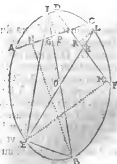
THEOR. XXXIX. PROP. LXIV.

Portiones eiusdem coni-sectionis, vel circuli, aut etiam anguli rectilinei; quarum intercepta diametrorum segmenta in Parabola sint æqualia, vel in Hyperbola, aut in Ellipsi, vel circulo, ad proprias semi-diametros eandem simul habeant rationem, vel in angulo pertingant ad eandem inscriptam concentricam Hyperbolen, habent bases altitudinibus reciprocè proportionales.

Nam, quo ad primùm, reiterata inspectione figurarum tertij Schematismi pro propositione 40. huius; ibi in portionibus A B C, H E I, tùm quandò, in Parabola, diametri B F, E G sint æquales; tùm quandò, in reliquis sectionibus, sit semi-diameter D B ad B F diametrum portionis A B C, vt semi-diameter D E, ad E G diametrum portionis H E I, demonstratum fuit, propè finem, basim H I portionis H E I, ad basim A C portionis A B C, esse reciprocè, vt altitudo portionis A B C ad altitudinem portionis H E I. Quod tanquam Coroll. Prop. 40. huius elici poterat. At cum ibi tantùm loquatur de portionibus Ellipticis, quæ sint semi-Ellipsi minores, hoc idem verificari etiam de portionibus semi-Ellipsi maioribus, vel etiam de ijsdem semi-Ellipsibus, ita demonstrabitur.

Schematismus 3.

Sint duæ portiones A B C, D E F de eadem Ellipsi, cuius centrum O; vtraque verò sit semi-Ellipsi maior, quarum diametri G B, H E ad proprias semi-diametros B O, E O sint in eadem ratione. Dico, basim A C vnius, ad D F basim alterius, esse vt huius altitudo E M, ad illius altitudinem B N.



Productis enim diametris B G, E H vsq; ad Ellipsis peripheriam in punctis I, L, è quibus ductis I P, L R, basibus A C, D F perpendicularibus, hæ erunt altitudines portionum A I C, D L F, & reliquarum portionum altitudinibus, B N, E M æquidistabunt.

Et cum, ex hypothesi, sit G B ad B O, vt H E ad E O, sumptis consequentium duplis, conuertendo, & per conuersionem rationis B I ad I G, erit vt E L ad L H; & sumptis antecedentium subduplis, O I ad I G, vt O L ad L H: quare, per superiùs ostensa, in portionibus A I C, D L F, semi-Ellipsi minoribus, erit basis A C ad D F, vt altitudo L R ad altitudinem I P, sed L R ad I P est, vt E M ad B N, vt mox demonstrabitur, ergo A C ad D F erit quoque, vt E M ad B N.

Quod autem sit L R ad I P, vt E M ad B N. Cum demonstratum sit

esse

esse E L ad L H, vt B I ad I G, erit diuidendo, & conuertendo L H ad H E, vel L R ad E M (ob triangulorum L H R, E H M similitudinem), vt I G ad G B, vel ita I P ad B N (ob similitudinem triangulorum I G P, B G N) & permutando L R ad I P, vt E M ad B N. Quod reliquum erat ostendere de portionibus semi-Ellipsi maioribus.

Tandem intelligantur duæ semi-Ellipses I E B, E B L de eadem Ellipsi. Dico basim I B ad basim L E esse reciprocè, vt altitudo portionis E B L ad altitudinem portionis I E B.

Iunctis enim E I, E B; cum in triangulis I E O, B E O, quorum communis vertex E, sit basis I O æqualis basi B O, erit triangulum I E O, triangulo B E O æquale; & si concipiatur basis trianguli B E O permutari, ita vt ipsa fit O E, & vertex B: cum huiusmodi triangula sint æqualia, erit basis I O, vnius I E O, ad basim O E, alterius B E O, ita reciprocè altitudo trianguli B E O, cuius vertex B, ad altitudinem trianguli I E O, cuius vertex E; sed horum triangulorum altitudines sunt eædem, ac semi-Ellipsium E B L, I E B, ergo I O ad O E, vel sumptis duplis, basis I B ad basim L E, erit reciprocè, vt altitudo semi-Ellipsis E B L ad altitudinem semi-Ellipsis I E B.

Quò autem ad portiones eiusdem anguli, super figuram primam Propos. 45. huius, in qua diametri B E, M D portionum, siue triangulorum A B C, H M I pertingunt ad eandem Hyperbolen D E concentricam, cum ibi demonstratum sit ipsa triangula inter se esse æqualia, erit basis A C vnius, ad H I basim alterius, vt altitudo trianguli H M I ad altitudinem trianguli A B C: hoc enim elicitur ex elementis, nam triangula æqualia habent bases altitudinibus reciprocè proportionales. Quare portiones eiusdem coni-sectionis, &c. Quod erat, &c.

THEOR. XL. PROP. LXV.

Æquales portiones eiusdem coni-sectionis, vel circuli, aut etiam anguli, habent bases altitudinibus reciprocè proportionales. Et è conuerso.

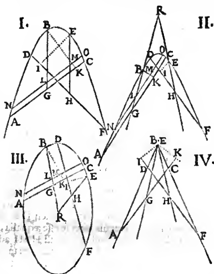
Si portiones de eadem coni-sectione, vel circulo, aut etiam angulo habuerint bases altitudinibus reciprocè proportionales, ipsæ portiones æquales erunt.

1. ETenim, quò ad primum, quandò portiones de eadem coni-sectione, vel circulo, aut etiam angulo sunt æquales, si fuerint de eadem Parabola, habent intercepta diametrorum segmenta inter se æqualia, & si de eadem Hyperbola, vel Ellipsi, vel circulo habent segmenta proprijs semi-diametris proportionalia (nam si fuerint de eodem angulo propositum satis constat, ex Elementis) a sed quandò huiusmodi portionibus insunt conditiones prædictæ, ipsæ habent b bases altitudinibus reciprocè proportionales, ergo, & cum fuerint equales, ipsarum bases altitudinibus erunt reciprocæ.

a 63. h.
b 64. h.

cæ. Quod erat primò, &c. quodque tanquam præostensum bis assumpsimus in 51. h.

2. PRo demõstratione autẽ cõuersi huius, ponantur portiones A B C, D E F de eadem coni-sectione, in primis tribus figuris, (quę tamen in tertia sint semi-Ellipsi minores) vel de eodem angulo, vt in quarta, quarum omniũ diametri sint G B, H E, bases A C, D F, altitudines verò B K, E I, centrum autem in secunda, & tertia sit R: sitque basis A C ad basim D F, reciprocè, vt altitudo E I ad altitudinem B K. Dico ipsas portiones inter se æquales esse.



Nam si segmenta diametrorum B G, E H, in prima exhibente Parabolen, fuerint æqualia; & in secunda, ac tertia exhibentibus Hyperbolen, & Ellipsim, habuerint ad proprias semi-diametros B R, E R eandem rationem, iam patet, per 40. huius, ipsas portiones inter se æquales esse.

At si inter hæc diametrorum segmẽta non est prædicta æqualitas in prima figura; vel proportionalitas, in secunda, & tertia, alterum ipsorum segmẽtorum erit æquo maius. Sit ipsum B G, & ad æquum reducatur in L: erit ergo B L minus B G, cui per L ordinatim applicetur N L O (quæ basi A C æquidistabit) altitudinem B K secans in M; & erit B M altitudo portionis N B O.

Iam, diameter L B, in prima, facta est æqualis diametro H E; in secunda verò, & tertia nũc ponitur L B ad B R habere eandem rationem quàm H E ad E R, ergo per primam partem huius, erit basis N O ad D F, vt altitudo E I ad B M; vnde rectangulum sub N O, B M æquabitur rectangulo sub D F, E I; sed est, ex hypothesi, basis A C ad D F, vt altitudo E I ad B K, ergo, & rectangulum sub A C, & B K, æquabitur eidem rectangulo sub D F, & E I; quare duo rectangula sub N O, & B M, & sub A C, & B K sunt æqualia, quod est falsum. Rectangulum enim sub N O, B M minus est rectangulo sub A C, B K, eò quod sub minoribus lateribus contineatur, cum sit applicata N O minor applicata A C, & altitudo B M minor altitudine B K: quapropter ipsa diametrorum segmenta, in prima, æqualia erunt; & in re-

& in reliquis, erunt proprijs semi-diametris proportionalia, hoc est ipsæ portiones æquales [a] erunt. De portionibus tandem eiusdem anguli, quæ sunt triangula, iam notum est, quandò bases ipsorum altitudinibus sint reciprocè proportionales, ipsa triangula esse æqualia. Quare, &c. quod secundò probandum erat. a 40. h.

Haud incongruum, neque inutile duximus hic adnotasse Theorema huiusmodi.

THEOR. XLI. PROP. LXVI.

Æquales portiones eiusdem coni-sectionis, vel circuli (quæ tamen in Ellipsi sint, vel vnà æquales, vel vnà maiores, vel vnà minores semi-Ellipsi) ad inscripta sibi triangula, (nempè ad ea, quorum bases eædem sunt, ac portionum, eædemque altitudines, siuè ijdem vertices) vel ad circumscripta parallelogramma, sunt inter se in vnà, eademque ratione.

NAm cum bases æqualium portionum eiusdem coni-sectionis, vel circuli earum altitudinibus sint [b] reciprocæ, bases quoque inscriptorum triangulorum, eorum altitudinibus reciprocabuntur, cum vtrobique altitudines, & bases ponantur eædem; ac propterea ipsa triangula æqualia erunt. Quare, vt portio ad portionem, ita triangulum ad triangulum, ob æqualitatem tùm portionum, tùm triangulorum; & permutando, portio ad sibi inscriptum triangulum, vt altera æqualis portio de eadem coni-sectione, vel circulo ad sibi inscriptum triangulum. Et sumptis consequentium duplis, portio ad circumscriptum parallelogrammum, erit vt altera portio ad circumscriptum parallelogrammum. Quod erat, &c. b 65. h. ad num. 1.

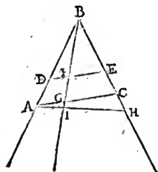
Hoc de solis Parabolæ portionibus, etiam si inæqualibus, nec de eadem Parabola, manifestum iam erat ex Archimede (omnis enim Parabolæ portio ad sibi inscriptum triangulum habet [c] rationem sesquitertiam.) De reliquarum autem coni-sectionum æqualibus portionibus, nondum. c 17. pr. h.

LEM.

LEMMA XIII. PROP. LXVII.

Si in angulo A B C applicatæ sint duæ rectæ lineæ D E, A C, quæ ab eadem recta B G per verticem B ducta proportionaliter secentur, ita vt sit A G ad G C, homologè, vt D F ad F E. Dico ipsas A C, D F inter se æquidistare.

SI enim A C non est ipsi D E parallela, sit alia applicata A H, secans B G in I: erit ergo (ob parallelas) A I ad I H, vt D F ad F E; vel ob hypothesim, vt A G ad G C, ergo in triangulo A C H erit I G parallela ad H C, sed ipsæ conueniunt in B. Quare non erit alia ex A ipsi D E parallela, quàm A C. Quod erat, &c.



THEOR. XLII. PROP. LXVIII.

Conuersum Prop. 45. h.

Bases æqualium portionum, ex eodem angulo, siue ex eadem quacunque coni-sectione, vel circulo abscissarum, eandem inscriptam eiusdem nominis sectionem similem, & concentricam ad puncta media contingunt.

SInt de angulo rectilineo, vt in prima figura, vel de qualibet alia coni-sectione, vel circulo, vt in secunda, abscissæ duæ æquales portiones A B C, D E F, quarum bases A C, D F sint bifariam sectæ in G, H, & per G inscribatur [a] eiusdem nominis sectio similis, & concentrica exteriori A B F, quæ sit I G H. Dico basim A C sectionem I G H contingere in G, & basim quoque D F eandem sectionem contingere in H.

a 4. sec. conic & 56.7. p. h.

Iungatur, in prima, B G, & producatur, nam ipsa erit diameter Hyperbolæ I G H (cum sit B eius centrum) bifariam secans omnes in ea applicatas, quæ si vsque ad asymptotos producantur, erunt, & ipsarum segmenta inter asymptotos, & sectionem æqualia [b] inter se, quare si ipsa segmenta concipiantur addita æqualibus semi-applicatis in sectione eis in directum positis, prouenient totæ applicatæ in angulo A B E bifariam sectæ à diametro B G producta, sed ponitur quoque applicata A C bifariam secta in G, quare A C ipsis applicatis in sectione [c] æquidistabit, ac ideò sectionem I G H continget [d] in G.

b 8. secũd. conic.

c 67. h.

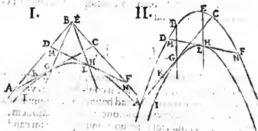
d 32. primi conic.

In secunda autem figura quascunque coni-sectiones exhibente ducatur ex G diameter G B, quæ vtriusque sectionis A B E, I G H erit communis diameter (cum ipsæ ponantur sectiones concentricæ, &c.) ad applicatas in

ipsis

ipsis æqualiter inclinata; quare applicatæ in sectione I G H ad diametrum B G æquidistabunt applicatis in sectione A B C ad eandem diametrum, quarum vna est A C per verticē G ducta, cum in G sit bifariam secta; ergo ipsa A C continget [a] in G sectionem I G H. *a ibidem.*

Sed hoc idem breuius, tùm in angulo, tùm in qualibet coni-sectione, omisso precedenti Lemmate.



CONcedatur sectionem I G H occurrere rectæ A C in alio puncto quàm G, quod sit K. Dico tamen punctum K idem esse ac G.

Quoniam erit A K [b] æqualis G C, sed est quoque A G æqualis eidem G C, ergo A K, & A G sunt æquales, sed hæ habent communes terminos ad A, ergo, & punctum K congruet cum G. Quare ipsa basis A C contingit omnino sectionem I G H in G. *b 8. sec. conic. & ex 1. Coroll. 46. h.*

Ampliùs, in prima figura, iungatur E H, quæ est [c] diameter inscriptæ Hyperbolæ I G H, & in secunda ex H ducatur vnius sectionis diameter H E, quæ erit quoque diameter alterius (cum ponantur concentricæ, &c.) Si ergo hæc diameter E H producatur, ipsa secabit interiorem sectionem I G H in aliquo puncto, vt in L, ex quo ducatur in sectione A B F recta M L N ipsi D F æquidistans. *c 8. pr. h.*

Et quoniam, in singulis, figuris D F est bifariam secta in H, erit quoque M N bifariam secta in L (cum M N ex constructione æquidistet ordinatim ductæ D F in eadem sectione A B F) sed sectio I G transit per L, quare sectio ipsa I G continget omnino rectam M N in L (quod ijsdem rationibus, ac supra de A C ostensum fuit, demonstrabitur) ergo portio M E N æquabitur [d] portioni A B C, sed portio quoque D E F æquatur eidem portioni A B C, ex hypothesi, quare portiones M E N, D E F inter se æquales erunt, suntque de eodem angulo, vel de eadem coni-sectione, vel circulo, & circa communem diametrum E H L, & ipsarum bases simul æquidistant, qua propter, & bases quoque simul in totum congruent, nempe M N cum D F, ac ideò punctum L cum puncto H. Recta igitur D F, quæ eadem est cum M N, contingit sectionem I G in H. Quod tandem erat demonstrandum. *d 45. h.*

COROLL. I.

HInc elicitur, quod basis angularis portionis, vel basis cuiuslibet coni-sectionis, vel circuli ad punctum medium contingit eiusdem nominis sectionem similem, & concentricam per ipsum punctum dato angulo, vel sectioni, aut circulo inscriptam.

Nam primò loco superius demonstratum fuit, in vtraque figura, basim AC ad eius punctum medium G omnino contingere sectionem IGH per punctum G concentricè inscriptam, &c.

COROLL. II.

SEquitur etiam, quod segmenta diametrorum, omnium æqualium portionum ex eodem angulo, aut ex eadem coni-sectione, vel circulo abscissarum, cum earum extremis terminis ad basim, perueniunt ad eandem eiusdem nominis, similem, & inscriptam concentricam sectionem.

Etenim puncta media basium ipsarum portionum, quæ iam eandem similem inscriptam concentricam sectionem contingunt, eadem sunt, ac prædicta diametrorum extrema puncta, &c. vt satis constat.

MONITVM.

OPportunè monendus hic Lector est, nos superius, & in sequentibus, Hyperbolen intra angulum asymptotalem descriptam, & Parabolen Parabolæ æquidistantem, interdum nuncupasse similes, & concentricas sectiones, perinde ac si angulus rectilineus asymptotalis, sectio esset similis, & concentrica Hyperbolæ, & quasi Parabole æquidistanti Parabolæ concentrica esset. Verum si id accuratius perpendamus, quo ad angulum rectilineum, animaduertere licebit ipsum non abs re haberi posse tanquam vnam Hyperbolarum, quarum centrum sit vertex eiusdem anguli, & asymptoti sint eadem anguli latera: Omnes enim Hyperbolæ cum ijsdem asymptotis, siuè cum eodem centro descriptæ, sed cum diuersis semi-axibus, inter se similes sunt, vti ex doctrina primi huius iam satis patuit; & quò semi-axes sunt minores, eò tales Hyperbolæ fiunt angustiores (nempe inscriptibiles per vertices ijs, quarum semi-axes sint maiores) sed tantò magis accedunt ad latera eiusdem anguli, nunquam tamen eis occurrunt, & in hoc semi-axium decremento, peruenitur tandem ad MINIMVM, nempe ad punctum, seu verticem anguli, qui est centrum omnium similium Hyperbolarum, & ad MINIMAM Hyperbolen,

hoc

hoc est ad omnium similium, & concentricarum angustissimam, cum ipsis anguli lateribus, seu cum asymptotis in totum congruentem. Itaque angulus rectilineus vocari quodammodo potest prima, & MINIMA similium Hyperbolarum concentricarum, quarum angulus asymptotalis sit aequalis dato, & qualibet praedictarum similium Hyperbolarum inscriptarum dici potest sectio eiusdem nominis cum angulo similis, & concentrica, &c. quales meritò appellantur duae Hyperbolae, vel duae Elipses inter se similes, & concentricae.

Quò autem ad congruentes Parabolas, vel etiam non congruentes, (omnes enim Parabolae sunt similes inter se) sed per diuersos vertices simul adscriptas, quas alibi aequidistantes diximus, liceat etiam, quamuis impropriè, concentricas appellare. Etenim, & Parabole suum habet centrum à quo procedunt eius diametri, sed cum id positum sit in infinitam distantiam extra sectionem, ideò ipsae diametri ab eodem centro emanantes inter se aequidistant, &c.

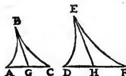
Ob easdem quoque rationes, si concipiantur Hyperbolae intra angulos asymptotales, vel Parabolae aequidistantes, vel Hyperbolae, aut Ellipses, vel circuli similes, & concentrici circa communes axes in gyrum conuersi, solida ab ipsis genita vocabuntur in posterum solida eiusdem nominis similia, & concentrica. Conus enim ab angulo procreatus habebitur pro primo, & MINIMO Conoidarum Hyperbolicorum similium, & concentricorum, &c. & Conoidalia Parabolica tanquam simul concentrica, quorum commune centrum abeat in infinitam distantiam. De similibus verò, & concentricis Conoidibus Hyperbolicis, aut Sphaeroidibus, vel Sphaeris, à similibus, & concentricis sectionibus genitis, nihil est quod ad nominum declarationem addamus, cum eadem definitio ipsi definito perquàm rectè conueniat. Verumenimuerò iam suscepta, ac nuper intercisa solidorum tractatio, antequam resumatur, nouarum quarundam vocum explicationem requirit, quam ideò in sequentibus ita exhibemus.

DEFINITIONES.

I.

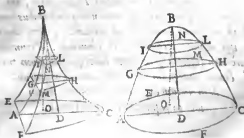
PLANA ACVMINATA SIMILIA vocentur illa, quæ inter se sint proportionalia, & quorum diametri super bases sint æqualiter inclinatæ, ac ijsdem basibus proportionales.

Hoc est si sint duo quælibet plana Acuminata proportionalia A B C, D E F, quorum diametri B G, E H cum basibus A C, D F æquales angulos alterum alteri constituant, nempe A G B ipsi D H E, & qui ei est deinceps C G B reliquo F H E sit æqualis, sitque diameter B G ad basim A C, vt diameter E H ad basim D F; huiusmodi plana inter se vocentur SIMILIA ACVMINATA. Vnde, & duæ similes Ellipses vocari poterunt similia Acuminata, cum vtraque ex duobus proportionalibus Acuminatis constet, siue ex duabus semi-Ellipsibus, per diametros æqualiter inclinatas dissectis, quarum diametri sunt basibus proportionales, &c. Idemque de duobus circulis, &c.



II.

SOLIDVM ACVMINATVM REGVLARE, vel tantùm SOLIDVM ACVMINATVM, voco omnem figuram solidam ad alteram partem deficientem, circa planum Acuminatum descriptam, cuius omnia plana basi solidi æquidistantia per Acuminati applicatas ducta, sint quoque plana Acuminata, eidem basi, ac inter se similia, & similiter posita, & quorum homologæ diametri sint ipsæ applicatæ prædicti Acuminati, &c.



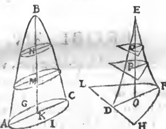
Esto planum quodcunque Acuminatum A B C, cuius basis A C, diameter B D, vertex B, & ipsa A C, sit vel diameter circuli, aut Ellipsis, vel cuiuscunque ipsarum figurarum portionis, aut diameter Parabolæ, vel Hyperbolæ, vel cuiuslibet alij plani Acuminati A E C F, quod tanquam basis, ad quemlibet inclinationis angulum cum plano A B C sit dispo-

dispositum, sintque omnia plana G M H, I N L, &c. quæ basi A E C F æquidistanter ducuntur per Acuminati A B C applicatas G H, I L, &c. ipsi basi, ac inter se, similia Acuminata, & similiter posita, atque ipsæ applicatæ G H, I L sint eorundem Acuminatorum homologæ diametri: huiusmodi figura SOLIDVM REGVLARE ACVMINATVM vocetur, vel tantùm ACVMINATVM SOLIDVM; A E C F verò BASIS solidi Acuminati; sed portionem A B C Acuminati plani intra Acuminatum solidum interceptam (eò quod ipsa sit tanquam Regula, vel Modulus, aut Canon homologarum diametrorum similium planorum çquidistantium, ac solidum procreantium) nuncupare liceat CANONEM solidi Acuminati, qui si ad planum basis A E C F rectus fuerit, dicatur CANON RECTVS solidi Acuminati, & B D diameter Canonis, nuncupetur quoque AXIS solidi, & eius VERTEX punctum B, in quod abit solidum, atque eiusdem solidi ALTITVDO dicatur recta B O, quæ à vertice B super basim A E C F recta ducitur. Plana verò A C, G H, I L, &c. dicantur PLANA ORDINATIM DVCTA ad axim solidi Acuminati.

III.

SOLIDA ACVMINATA PROPORTIONALIA dicantur illa, quorum omnia plana ordinatim applicata per puncta, eorum axes proportionaliter diuidentia, sint quoque inter se, & basibus proportionalia.

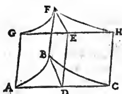
Videlicet si duo solida Acuminata A B C, D E F, quorum bases sint A G C I, L F H D axes verò sint B K, E O proportionaliter secti in M, P; & in N, Q; ita vt K M, ad M B sit vt O P, ad P E; & K N ad N B, vt O Q ad Q E, &c. sitque basis A G C ad basim L F H, vt planum ordinatim applicatum per M ad applicatum per P, & vt applicatum per N ad applicatum per Q, &c. talia solida, dicentur SOLIDA ACVMINATA PROPORTIONALIA.



IIII.

Si super diametrum Acuminati plani descriptum sit parallelogrammum quodlibet super ipsum planum quomodocunque eleuatum, idemque Acuminatum concipiatur sibi ipsi æquidistanter moueri, ita vt eius diameter suo motu parallelo prædictum parallelogrammum describat: solidum occlusum à duobus oppositis Acuminatis congruentibus, ac parallelis, atque à superficie, quæ à perimetro figuræ motæ describitur CYLINDRICVS vocetur. Acuminatum verò solidum procreans, dicatur BASIS, & parallelogrammum, per quod fit æquidistans latio Acuminati plani Cylindricum procreantis, CANON DIAMETRALIS nuncupetur.

Nimirum, sit Acuminatum planum A B C, cuius diameter B D, cui insistat parallelogrammum quodcumq; B D E F super planum figuræ A B C vtcunque



vtcunque eleuatum, concipiaturque Acuminatum ABC moueri motu sibi ipsi parallelo, sed ita vt recta BD æquidistanter incedat super parallelogrammum BE, donec congruat cum opposito latere EF. Huiusmodi solidum occlusum à parallelis, & congruentibus Acuminatis ABC, GFH, atque à superficie, quæ à perimetro ABCA in sua latione describitur, vocetur CYLINDRICVS, Acuminatum verò ABC eius BASIS, & parallelogrammum BE CANON DIAMETRALIS prædicti Cylindrici, cuius altitudo metietur per rectam ad vtrunque oppositorum planorum perpendicularem.

Itaque CYLINDRICVS dicetur omne solidum circa parallelogrāmum quodcunque descriptum, & cuius omnia plana basi solidi æquidistantia, ac per applicatas in parallelogrammo ducta, sint plana Acuminata, eidem basi, ac inter se æqualia, & similia, & similiter posita, & quorum homologæ diametri sint ipsæ applicatæ in prædicto parallelogrammo; quod CANON DIAMETRALIS Cylindrici vocabitur.

Omittimus vniuersaliores Solidorum Acuminatorū, ac Cylindricorum definitiones, cum hoc loco de ijs sermo minime habendus sit.

PROBL. XIV. PROP. LXIX.

Si Conoides quodcunque, vel Sphæra, aut Sphæroides oblongum, vel prolatum plano secetur ex dato solido portionem abscindente: possibile est per axem solidi, planum ducere, quod ad basim abscissæ portionis sit erectum. Item.

Possibile est basi portionis aliud planum æquidistans ducere, quod conuexam solidæ portionis superficiem contingat.

ESto quodcunque ex prædictis solidis ABC, cuius axis reuolutionis sit BD, atque ex eo per planum EHGI sit abscissa portio solida EFG, cuius basis EHGI (quæ, vel erit [a] Ellipsis, vel circulus.) Dico possibile esse basi EHGI planum ducere per solidi axem BD, quod ad basim EHGI rectum sit. Præterea possibile esse eidem basi aliud planum æquidistans ducere, quod solidæ portionis superficiem contingat.

[a] ex 13. 14. 15. Arch. de Conoi. &c.

Si enim planum secans EIG fuerit ad axem BD erectum, hunc secans in K, sectio circulus erit, [b] cuius centrum K; & si per axim BK agatur quodcunque planum EBG basim portionis EHGI secans per rectam EG, sectionis portio plana EBG erit [c] ea, quæ solidum genuit, cuius basis eadem EG, axis verò ipse BK, & ad basim EHGI recta [d] erit. Quod primò, &c.

[b] 12. Archim. ib. à Comād. restit.
[c] ibidem.
[d] 18. vnd. Elem.

Iam

Iam si per verticem B ducatur in plano portionis E B G recta B L, ipsam portionem contingens, hæc basi E G [a] æquidistabit: & si per B L concipiatur planum duci, quod plano per axem E B G sit erectum, id solidæ portionis superficiem continget [b] in B, atque basi E H G I erit parallelum [c] cum vtrumque planorum sit eidem E B G rectum; & communes sectiones B L, E G sint parallelæ. Quod secundò, &c.

[a] 32. primi conic. [b] 55. h. [c] per Sch. Clauij post 18. vndec. elem.

Si verò planum secans E H G I rectum non fuerit ad axem B D; (& tunc sectio [d] erit Ellipsis) secetur denuò datum solidum quocunque alio plano A H C I ad axem recto: (quod tamen non transeat per intersectionem axis B D cum plano E H G I, si hoc axem secuerit intra solidum) id in solido sectionem faciet [e] circulum, centrum habentem in axe B D, vti in D, omninò autem secabit basim E H G I per communem rectam H I tùm in Ellipsi, tùm in circulo applicatam, cui ex D, circuli centro, ducta perpendiculari D M; per axem B D, ac rectam D M agatur planum in solido efficiens genitricem sectionem E A B G C, cuius communis sectio cum circulo erit diameter A C, & cum Ellipsi erit recta E G.

[d] 13. 14. 15. Arch. de Conoi. &c. [e] 12. Arch. ib. à Comād. rest.

Iam priùs ostendam sectionem hanc per B D axem ductam ad secans planum E H G I, siue ad basim solidæ portionis E F G rectam esse. Quoniam cum planum circuli E H C I rectum sit ad planū per axem E A B C, cumq; linea I M in circulo perpendicularis sit ad A C horum planorum communem sectionem, erit eadem linea I M recta [f] ad planum per axem E A B C: quare omnia plana, quæ per ipsam ducentur ad idem planum E A B C recta erunt, [g] sed E H G I basis solidæ portionis transit per I M, ergo basis E H G I, siue planum secans rectum erit ad planum per axem E A B C, siue id rectum ad planum secans, hoc est ad basim solidæ portionis. Quod primò, &c.

[f] 4. def. vnd. Ele. [g] 18. vnd. Elem.

Cum ergo E G sit communis sectio planorum, eius scilicet, quod solidū secat, & eius, quod per axem ducitur erectum super planum secans, ipsa E G. erit [h] axis Ellipsis E H G I, qua bifariam secta in N, erit N Ellipsis centrum, ex quo, in plana portione E F G sectionis per axem à recta E G abscissæ, & super basim solidæ portionis erectæ, ducta diametro N F, & per F sectionem [i] contingente F O, per ipsam F O agatur planum, quod ad idem planum per axem E B G rectum sit, id solidæ portionis E F G superficiem contingent [l] in F, & basi E H G I æquidistabit. [m] Quod secundò, &c. Si fuerit ergo Conoides quodcunque, vel Sphæra, &c. possibile est, &c. Quod erat faciendum, ac demonstrandum.

[h] 13. 14. 15. Arch. de Conoi. &c. [i] 2. & 4. pr. h. [l] 55. h. [m] Schol. Clauij post 18. vndec. Elem.

SCHO-

SCHOLIVM I.

CVm huiusmodi solida portio E F G de quolibet prędictorum solid um abscissa, sit solidum ad alteram partem F deficiens, circa Acuminatū planum E F G descriptum, cumque omnia plana eius basi E H G I æquidistantia, sint plana Acuminata, vt in prima proximè præcedentium definitionum monuimus, sintque omnia inter se [a] similia, ac similiter posita, eò quod vel sint circuli, vel Ellipses, quarum homologi axes sunt [b] eædem applicatæ in Acuminato E F G, idcircò per secundam prædictarum definit. talis solida portio in posterum vocari poterit aliquandò solidum Acuminatum; & planum Acuminatum, seu portio plana E F G, cum sit recta ad basim E H G I, dicetur Canon rectus solidæ portionis.

a Coroll. 15. Arch. de Conoi. &c.

b 13. 14. 15. ibid.

COROLL. I.

EX hac elicitur, qua methodo per axem cuiuslibet Conoidis, aut Sphæroidis, vel Sphæræ, aut etiam Coni recti duci possit planum, quod ad datum quodcunque planum non per axem ductum, & solidum secans, rectum sit, etiam si secans planum in Conoide Parabolico, aut Hyperbolico, vel Cono non sit circulus, neque Ellipsis: simulque patet, quod prædictum planum per axem, aliud non per axem ductum omnino secat intra solidum: quæ omnia, vel leuiter perpendenti manifesta sunt ex dictis, quæque ab ipso Archimede tanquam possibilia, & iam nota passim supponuntur in libro de Conoid. &c.

SCHOLIVM II.

POterat quidem prima pars huius Problematis breuiùs persolui. Nam ex vertice B, vel ex quolibet alio axis puncto, super planum secans E H G I ducta perpēdiculari, per quàm, & per axem B D ducto plano; constat hoc idem super planum secans rectum [c] esse. Verùm cum sæpe eueniat, quod ipsa perpendicularis occurrat secanti plano non intra solidum, sed vel in eius superficie, vel extra, cumq; omnino ostendere opus sit, quod huiusmodi planum per axem, rectum ad planum secans, hoc idem planum secat semper intra solidum, idcircò prò huius Problematis solutione superiorem viam elegimus, quæ ad vtrunq; simul nos perduceret vnica constructione.

c 18. vnd. Elem.

COROLL. II.

COlligitur quoque planum, quod basi portionis cuiuslibet prædictorum solidorum æquidistat, atque eius conuexam superficiem contingit, eam contingere ad verticem diametri recti Canonis; hoc est tangere ad verticem axis portionis solidæ.

Nam,

Nam, ad finem propositionis ostensum fuit, planum contingens portionem solidam EFG, & basi EHGI parallelum, eam contingere ad punctum F, quod est vertex diametri NF Canonis recti EFG, atque insuper idem punctum contactus F, iuxta Archim. definitiones præmissas ad librum de Conoid, &c. iam notum est verticem vocari axis portionis solidæ EFG.

SCHOLIVM III.

EX his itaque notandum est, axim solidæ portionis eundem esse cum diametro prædicti Canonis recti, & altitudinem, eandem cum altitudine. Nam eadem recta FN, quæ ex constructione diameter est planæ portionis EFG, est quoque axis solidæ, cum ab F eius vertice, ad N centrum basis EHGI incedat. Præterea ducta ex harum portionum cõmuni vertice F recta FP ad basim EG planæ portionis, seu recti Canonis EFG perpendiculari. Patet hanc esse Canonis altitudinem, sed Canon EFG rectus ponitur ad basim EHGI; quare FP, quæ ad communem horum planorum sectionem EG est perpendicularis, recta erit ad planum basis EHGI, ac propterea ipsa erit quoque altitudo portionis solidæ EFG, cum perpendiculariter cadat ex eius vertice F super basim EHGI, &c.

COROLL. III.

PAtet denique axim portionis cuiuscunque prædictorum solidorum, & axim solidi, cuius est portio, esse in vno eodemque plano, quod per axem eiusdem solidi ad basim portionis rectum ducitur, siue esse in plano Canonis recti.

Etenim, & BD axis dati solidi, & FN axis solidæ portionis EFG sunt in plano EBC ducto per axem BD, sed erecto super basim EIGH portionis solidę EFG, quod planum EBC idem est, ac planum recti Canonis EFG intra solidam portionem intercepti.

Si ergo per axim datæ solidæ portionis, & per axim solidi, cuius est portio ducatur planum, hoc erit ad planum basis portionis erectum, atque in solida portione rectum Canonem exhibebit.

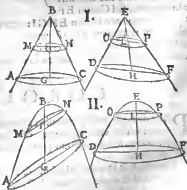
THEOR. XLIII. PROP. LXX.

Portiones eiusdem, vel diuersorum Conorum, aut Conoidum Parabolicorum, sunt solida Acuminata proportionalia. Item.

Portiones eiusdem, vel diuersorum Conoidum Hyperbolicorum, vel Sphærarum, aut Sphæroidum, quarum segmenta diametrorum in portionibus genitricium earum sectionum ad bases erectis intercepta, ad suas semi-diametros eandem homologam habeant rationem, sunt pariter solida Acuminata proportionalia.

SInt primò duæ quæcunque portiones A B C, D E F eiusdem, vel diuersorum Conorum, vt in prima figura, vel eiusdem, aut diuersorum Conoidum Parabolicorum, vt in secunda, quarum axes sint B G, E H, bases verò circuli, aut Ellipses A C, D F, ipsæque portiones solidæ; (quæ iam per primum Scholium præcedentis sunt solida Acuminata) planis per eorum solidorum axes ductis ad bases rectis [a] secentur, & fient [b] in solidis recti Canones A B C, D E F, qui erunt [c] portiones sectionum solida genitricium, & communes sectiones ipsorum cum basibus erunt [d] rectæ A C, D F, quæ circulorum, aut Ellipsium [e] erunt axes. Dico in vtraque figura solidas portiones A B C, D E F esse Acuminata solida proportionalia.

[a] 69. h. [b] ibid. 1. Schol. [c] ex 12. Archim. de Conoid. & Comand. supplem. [d] 3. vnd. Elem. [e] ex 13. Archim. ibidem.



Etenim horum Acuminatorum solidorum axibus B G, E H proportionaliter vtcunque sectis in I, L, ducantur per I, L plana M N, O P basibus A C, D F æquidistantia, quæ in solidis efficient sectiones ipsarum basibus similes [f] earumq; communes sectiones cum planis A B C, D E F [g] erunt rectæ M N, O P ipsis A C, D F [h] parallelæ, & earundem similium sectionum homologæ diametri.

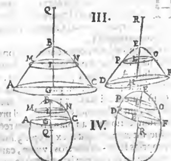
[f] ex Coroll. 15. ib. [g] 3. vnd. Elem. [h] 16. ib.

Iam cum sit G B ad B I, vt H E ad E L, ob constructionem, sitque in prima figura A C ad M N, vt G B ad B I; & D F ad O P, vt H E ad E L (cum Canones A B C, D E F sint triangula) erit A C ad M N vt D F ad O P, & quadratum A C ad M N, vt quadratum D F ad O P. In secunda verò est quadratum A C ad M N, vt recta G B ad B I (cum Canon A B C sit portio Parabolæ) vel vt recta H E ad E L, per constructionem, vel vt quadratum D E ad O P: est ergo in vtraque figura, vt quadratum A C ad M N, vel vt circulus, [i] aut Ellipsis

[i] Coroll. 7. Arch. ibid.

A C ad

A C ad sibi similem M N, ita quadratum D F ad O P, vel ita circulus, aut Ellipsis D F ad sibi similem O P, & permutando, sectio A C ad D F erit vt sectio M N ad O P, & hoc semper vbicunque solidorum Acuminatorum axes sint proportionaliter secti: quare, ex tertia præmissarum definitionum, Acuminata solida A B C, D E F erunt solida Acuminata proportionalia. Quod erat primò, &c.



PRæterea sint A B C, D E F duæ portiones eiusdem, vel diuersorum Conoidum Hyperbolicorum, vt in tertia figura, vel eiusdem, aut diuersorum Sphæroidum, vel Sphærarum, vt in quarta, (quæ portiones sunt pariter solida Acuminata per 1. Schol. *69.* h.) quarum bases sint circuli, aut Ellipses A C, D F. Patet quod si per axes solidorũ, quorum sunt portiones ducantur plana, *a* quæ portionum basibus sint erecta, fient in solidis portiones genitricium *b* sectionum A B C, D E F, hoc est in tertia portiones Hyperbolarum, & in quarta portiones Ellipsium, quas vocamus *c* Canones, & communes horum Canonum sectiones cum basibus erunt *d* rectæ A C, D F, quæ ipsarum basium erunt *e* axes. Sint iam Canonum A B C, D E F intercepta diametrorum segmenta B G, E H, (quæ & solidarum portionum axes vocantur ab Archimede) quibus productis vsque ad earum centra Q, R, habeat segmentum G B ad semi-diametrum B Q, eandem rationem, ac segmentum H E ad semi-diametrum E R. Dico in vtraque harum figurarum, portiones solidas, vel solida Acuminata A B C, D E F esse Acuminata solida proportionalia.

a 69. h.
b ex 12. Arch. de Conoid.
c 1. Schol. 69. h.
d 3. vnd. Elem.
e ex 14. & 15. Archim. ib.

Diuisis enim ipsorum axibus B G, E H proportionaliter vtcunque in I, L, ductisque per I, L planis M N, O P ipsis basibus A C, D F æquidistantibus, erit sectio M N in solido A B C similis *f* basi A C, & sectio O P in solido D E F similis basi D F, & earum communes sectiones cum planis Acuminatis A B C, D E F erunt rectæ M N, O P ipsis A C, D F parallelæ *g* vtraque vtrique, eruntque homologæ diametri earundem similium sectionum.

f ex Coroll. 15. eiusdem.
g 3. & 16. vnd. El.

Et quoniam, per constructionem, in Acuminatis planis A B C, D E F, Hyperbolarum, vt in tertia figura, aut Ellipsium, vt in quarta, segmenta diametrorum G B, E H ad proprias semi-diametros B Q, E R eandem habent rationem, erunt *h* ipsa Acuminata, plana Acuminata proportionalia; suntque B G, E H proportionaliter sectæ in I, L, ex constructione, quare vt recta A C ad D F, ita recta M N ad O P, (ex definitione planorum Acuminatorum proportionalium) & quadratum A C ad D F, hoc est circulus, vel *i* Ellipsis A C ad sibi similem D F, vt quadratum M N ad O P, vel vt circulus, aut Ellipsis M N ad sibi similem O P, & hoc semper vbicunque

h 36. h.
i ex coroll. sept. Arch. de Conoid.

axes B G, E H solidarum portionum sint proportionaliter secti: quare, ex definitione, ipsæ solidæ portiones A B C, D E F erunt solida Acuminata proportionalia. Quod vltimò demonstrandum erat.

COROLL.

Hinc manifestum fit solidas portiones eiusdem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, siue Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati, quarum recti Canones sint æquales, inter se esse Acuminata solida proportionalia.

Nam quò ad portiones eiusdem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, iam in prima parte huius propositionis ostensum est eas omnes, quæcunque sint, esse solida Acuminata proportionalia, ac, ideò, & illæ quarum recti Canones sint æquales, erunt pariter solida Acuminata proportionalia.

Quò autem ad solidas portiones eiusdem Conoidis Hyperbolici, siue Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati, quandò earum portiones genitricium sectionum ad plana basium rectæ, quæ eædem sunt, ac recti Canones fuerint æquales, patet ex prop. 63. huius, segmenta diametrorum ipsarum ad proprias semi-diametros, vnam, eandemque simul rationem habere; ac propterea ex ijs, quæ in hac vltimò loco demonstrauimus, huiusmodi solidæ portiones erunt Acuminata solida proportionalia.

THEOR. XLIV. PROP. LXXI.

Cylindrici æqualium altitudinum, inter se sunt vt bases.

Sint duo Cylindrici A, B, quorum bases sint plana Acuminata C D E, F G H, altitudines verò, sint æquales cuidam rectæ I. Dico Cylindricum A ad Cylindricum B, esse vt basis C D E ad basim F G H.

Concipiatur alius quicunque Cylindricus L, cuius basis sit parallelogrammum K T, altitudo verò sit eadem I: quod erit parallepipedum. Ostendam priùs Cylindricum A ad parallelepipedum, vel Cylindricum L esse vt basis C D E ad basim K T.

Nam si non est ita, erit basis C D E, vel maior, vel minor quàm fit opus, ad hoc vt ad basim K T habeat eandem rationem, ac Cylindricus A ad L. Esto primùm maior, sitque excessus O. Et cum Acuminatum C D E sit figura circa diametrum D M ad partem D deficiens, & cuius perimeter est ad eandem partem cauus, poterit, vsitata methodo, per continuam diametri D M bisectionem, inscribi Acuminato C D E figura ex parallelogrammis, ita vt ipsum Acuminatum superet inscriptam minori excessu, quàm sit O; sit ergo hæc inscripta P Q, R S, &c. Itaque cum Acuminatum C D E superet inscriptam P Q, R S, &c. minori quantitate O, erit inscripta adhuc maior, quam opus est ad hoc, vt ad basim K T sit vt Cylindricus A ad Cylindricum L.

Iam intra Cylindricum A super omnia inscriptæ figuræ parallelogramma

ma P Q, R S, &c, concipiantur descripta solida parallelepipeda æqualium altitudinum cum Cylindrico A, vel L; & quorum insistentes lineæ sint æquidistantes insistentibus Cylindrici A, &c. erit ergo vnumquodque parallelepipedorum inscriptorum, ad parallelepipedum L, a vt propria basis ad basim, ac ideò omnia simul inscripta super P Q, R S; &c. ad vnicum parallelepipedum, vel Cylindricum L, erunt vt omnes bases P Q, R S, &c. hoc est vt figura inscripta ad basim R T; sed inscripta ad K T maiorem habet rationem quàm Cylindricus A ad L, ergo, & omnia simul parallelepipeda inscripta; ad Cylindricum L maiorem habebunt rationem, quàm Cylindricus A circumscriptus ad eundem Cylindricum L, ergo inscripta simul parallelepipeda maiora erunt Cylindrico A; pars suo toto, quod est absurdũ: non est ergo basis C D E maior quàm opus est ad hoc vt ad basim K T sit vt Cylindricus A ad L.

a 32. vnd. Elem.

Si verò ponatur basim C D E ad K T habere minorem rationem quàm Cylindricus A ad L, erit basis C D E minor quàm opus est ad hoc vt huiusmodi magnitudines sint proportionales, inuento igitur defectu, &c. & facta basi C D E circumscriptione figuræ ex parallelogrammis, &c. quæ ad basim K T adhuc minore habeat rationem quàm Cylindricus A ad L, & circumscriptis parallelepipedis vt supra, ostendetur aggregatum circumscriptorum parallelepipedorum ad Cylindricum L esse vt figura circumscripta ab basim K T, hoc est, habere minorem rationem quàm Cylindricus A ad eundem Cylindricum L, ideoque prædictum aggregatum parallelepipedorum minus esse Cylindrico A, totum sua parte, quod est absurdum. Non ergo basis C ad K T habet maiorem, nec minorem rationem quàm Cylindricus A ad L, ergo erit basis C D E ad basim K T, vt Cylindricus A ad L. Eadem ratione demonstrabitur, basim K T ad Acuminatum F G H, siue ad basim Cylindrici B, esse vt Cylindricus L ad Cylindricum B; quare, ex æquo, erit vt basis C D E ad basim F G H, ita Cylindricus A ad Cylindricum B. Quod erat, &c.

COROLL.

Perspicuum hinc est, quod si huiusmodi Cylindrici æqualis altitudinum æquales bases habuerint inter se æquales erunt.

THEO-

THEOR. XLV. PROP. LXXII.

Si Cylindricus plano secetur basi æquidistante, erit Cylindricus ad Cylindricum, vt altitudo ad altitudinem.

HOc eadem penitus constructione, ijsdemque argumentis demonstrabitur, ac 13. duodecimi Elem. ope tamen præcedentis Corollarij; animaduertendo simul, quod dum Cylindricus plano secatur basi æquidistante, in ipsa sectione oritur figura similis, & æqualis, siue in totum congruens basi Cylindrici: nam ipse Cylindricus, ex motu parallelo suæ basis procreari concipitur, ex definitione, &c.

SCHOLIVM.

EX hac pendet huius conclusionis demonstratio, quod est conuersum prop.71. huius; nempe.

Cylindrici æqualium basium sunt inter se, vt altitudines; quod ostenditur vt in 14. duodecimi Elementorum.

THEOR. XLVI. PROP. LXXIII.

Cylindrici, quorum bases altitudinibus reciprocantur, inter se sunt æquales: & è conuerso.

HVius Theorematis demonstratio elicitur ex præcedenti, estque omninò similis 15. duodec. Element. itaque breuitatis gratia, hanc ipsam omittimus, simulque nonnullas alias Cylindricorum affectiones, cum hìc de ijs differere non sit opus.

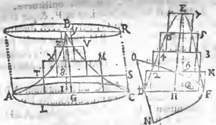
THEOR. XLVII. PROP. LXXIV.

Solida Acuminata proportionalia, quorum bases altitudinibus sint reciprocè proportionales inter se sunt æqualia.

SInt duo Acuminata solida proportionalia, quorum Canones ABC, DEF sint super bases AC, DF, & circa diametros BG, EH; bases verò horum solidorum sint Acuminata plana ALC, NFO circa diametros AC, DF, sitque vnius solidi altitudo BI, ad alterius altitudinem EQ reciprocè, vt basis NFO ad basim ALC. Dico huiusmodi solida inter se æqualia esse.

Si enim

Si enim fuerint inæqualia, alterum ipsorum minus erit: sit ipsum ABC, quod cum sit ad partem B deficiens, patet ei circumscribi posse per continuam axis BG bisectionem, &c. figuram ex Cylindris æque-altis, quæ inscriptum solidum Acuminatum ABC superet minori excessu, quo solidum DEF dicitur excedere idem solidum Acuminatum ABC: (sufficit enim vt circumscripto Canoni ABC parallelogrammo AR, eius ope, tanquam circa diametralem Canonem, ad æquidistantem motum basis ALC describatur Cylindricus AR, vt vides, circumscribens Acuminatum solidum ABC, sic enim plano per punctum medium axis BG applicato, bifariam [a] secabitur Cylindricus, quod si iterum axis dimidium bifariam secetur, &c. relinquetur tandem Cylindricus AS, qui prædicto excessu minor erit: vnde hac vltima diametri BG diuisione per æqualia segmenta, completa circumscriptione Cylindricorum TM, XV, ZY æqualium altitudinum, quorum diametrales Canones sint AS, TM, XV, XY; aggregatum ipsorum excedet solidum ABC minori quantitate, quàm sit primus Cylindricus AS, cum AS sit semper excessus circumscriptæ figuræ ex Cylindricis super inscriptam ex æque-altis Cylindricis, &c. sed Cylindricus AS ponitur minor excessu solidi DEF super ABC, ergo circumscripta figura ASMY ex Cylindricis, superat inscriptum solidum ABC minori excessu ipsius solidi DEF supra ABC) sit ergo quæsita figura circumscripta, ex Cylindricis AS, TM, XV, ZY, &c. quæ ideò adhuc minor erit solido DEF, cui eadem arte circumscribatur figura ex totidem æque-altis Cylindricis DK; 2 3; 4 5; 6 7; quorum maximi, diametralis Canon sit DK super basim OFN; proximi verò diametralis Canon sit 2 3, &c. *a 72. h.*



Iam patet horum solidorum altitudines BI, 9Q in tot æquas partes secari à parallelis basibus circumscriptorum Cylindricorum, in quot [b] secatur diametri BG, EH, Canonum ABC, DEF. Sit igitur primi Cylindrici AS altitudo 8 I, & primi DK altitudo 9 Q: & cum sit basis ALC, ad basim OFN, ita reciprocè altitudo EQ ad altitudinem BI, sumptis consequentium æque-submultiplicibus 9 Q, 8 I; erit basis ALC, ad OFN, vt altitudo 9 Q, ad 8 I; quare Cylindricus AS æqualis erit [c] Cylindrico DK. Eadem ratione demonstrabuntur reliqui Cylindrici TM, XV, ZY, reliquis 2 3, 4 5, 6 7, æquales esse, singuli singulis, quapropter vniuersa figura ex Cylindricis, circumscripta solido ABC, æqualis erit vniuersæ circumscriptæ solido DEF, sed circumscripta ipsi ABC demonstrata est minor solido DEF, ergo, & circumscripta solido DEF, ipso sibi inscripto solido minor erit, totum sua parte, quod est absurdum. Non est ergo vllum horum Acuminatorum

b 17. vnd. Elem.

c 73. h.

rum

rum altero maius: quare omnino inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

MONITVM.

Non paucas alias solidorum Acuminatorum, eorumque truncorum proprietates (quales nimirum attigimus de planis, & mensalibus Acuminatis in Scholio propos. 37. huius) facilè huc esset, si locus requireret, ex superioribus afferre: verùm ad opportuniorem occasionem hæc omnia, aliaque fusius forsan pertractabimus, si Deo nobis valetudinem cum vita, vel saltem mitiorem ægritudinem præstare placuerit. Modò ad inuentionem MAXIMARVM, MINIMARVMQVE solidarum portionum accedamus, nonnullis adhuc præostensis.

LEMMA XIV. PROP. LXXV.

Datæ portioni anguli rectilinei, circa diuersam diametrum datam, æqualem portionem constituere.

ESto ex angulo rectilineo abscissa portio A B C, cuius basis A C, diameter verò B D; sitque data alia diameter B E, circa quam oporteat portionem ipsi A B C æqualem constituere.

Latus A B secetur bifariam in F, & per F agatur F G parallela ad B C cum B E occurrens in G, per G verò ducatur A G H ipsam B C secans in H, atque inter C B, B H sumatur media proportionalis B I agaturque per I recta I L basim A C secans in M, & datam diametrum B E in N, & B A productam, in L. Dico ipsam I L abscindere L B I portionem quæsitam.

Triangulum enim A B C ad triangulum A B H est vt basis C B ad B H, vel vt quadratum mediæ proportionalis I B ad quadratum tertiæ B H, vel vt triangulum L B I ad idem triangulum A B H: (ob similitudinem) quare triangula A B C, L B I sunt æqualia.

Et cum rectæ L I, A H simul æquidistent, secenturque ab eadem B N ex vertice B trianguli L B I ducta, erit L N ad N I, vt A G ad G H, vel vt A F ad F B (ob parallelas F G, B H) sed est A F ipsi F B æqualis (per constructionem) ergo, & L N ipsi N I æqualis erit. Itaque ad datam diametrum B N, in angulo A B C ordinatim applicata est L I abscindens triangulum, vel portionem L B I alteri datæ portioni A B C æqualem. Quod faciendum erat.

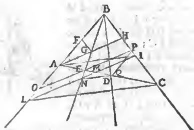
SCHO-

SCHOLIVM.

HIs peractis, patet bases A C, I L æqualium portionum de eodem angulo A B C necessariò se mutuò secare intra angulum. Nam I M, quæ ex puncto I inter H, & C sumpto æquidistans ducitur rectæ A H necessariò occurrit cum A C, vt in M.

Dico ampliùs earum basium occursum M cadere omninò inter diametros B D, B E; hoc est inter puncta E, D; atque rectas ND, A I, L C harũ basim tùm puncta media, tùm extrema iungẽtes esse inter se parallelas.

Si enim per E agatur O E P ipsis A H, L I æquidistans, & per P recta P Q parallela ad A B, erit (ob ipsarum æquidistantiam) O E æqualis E P, itemque A E çqualis E Q (ob triangulorum similitudinem A E O, Q E P) atque anguli ad E sunt æquales, quare & ipsa triangula çqualia erunt, quibus communi addito trapetio A B P E, fiet triangulum O B P æquale mensali A B P Q, hoc est minus triangulo A B C, vel triangulo L B I, quare L I est infra æquidistantem basim O P, siue basis L I secat basim A C vltra E, versus D. Præterea cum sit C B ad B I, ª vt C I ad I H, vel vt C M ad M A, sitque C B maior B I erit C M maior M A, hoc est punctum M cadet vltra D, versus E. Itaque harum basium occursus est inter diametros B N, B D. Quod idem est, ac si dicatur nullam ipsarum basium transire per medium punctum alterius.

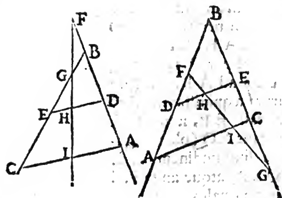


ª Coroll. 12. primi huius.

Tandem cum triangula A B C, L B I sint æqualia, dempto communi triangulo A B I, remanebit triangulum A C I çquale triangulo A L I, suntque super eadem basi A I, quare A I ipsi L C æquidistabit; & cum inter parallelas A I, L C interceptæ sint duæ C A, L I proportionaliter sectæ in N, D; (ibi enim bifariam sectæ sunt ex hypothesi) erit quoque iuncta N D ipsi L C, vel A I æquidistans; vt patet ex Elementis,

LEMMA XV. PROP. LXXVI.

Si in angulo ABC applicatæ fuerint quotcunque rectæ lineæ AC, DE, &c. inter se parallelæ; quæ a quacunque alia recta FG vtrique lateri dati anguli occurrente in F, G, secentur in H, I, &c. Dico vt rectangulum FHG ad DHE, ita esse rectangulum FIG, ad AIC.



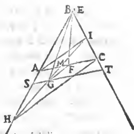
Etenim ratio rectanguli FHG ad DHE, componitur ex ratione FH ad HD, siue ex FI ad IA; & ex ratione GH ad HE, siue ex GI ad IC; sed & ratio rectanguli FIG ad AIC ex ijsdem rationibus componitur, quapropter rectangulum FHG ad DHE, est vt rectangulum FIG ad AIC. Quod erat, &c. Et permutando, rectangulum FHG ad FIG, vt rectangulum DHE ad AIC.

THEOR. XLVIII. PROP. LXXVII.

Si fuerint duæ æquales portiones de eodem angulo, vel de eadem coni-sectione, vel circulo, & ex puncto medio basis vnius portionis applicata sit in angulo, vel sectione quædam recta linea basi alterius portionis æquidistans: rectangulum sub segmentis huius applicatæ æquabitur quadrato semi-basis eiusdem portionis, cui hæc ipsa applicata æquidistanter ducta fuit.

Sint de eodem angulo, vt in præsenti figura, vel de quacunque coni-sectione, vt in figuris tertij Schematismi, abscissæ duæ æquales portiones ABC, HEI (vti docuimus in præcedenti, atque ex quadragesima huius absolui posse elicitur) quarum diametri sint BF, EG bases verò sint AC, HI ab ipsis diametris bifariam sectæ in F, G. Iam [a] patet has bases omninò se mutuò secare, atque inter portionum diametros vt in M, siue, punctum earum occursus M differre à punctis medijs F, G. Itaque si per alterum ipsorum, vtputa per G puncto medio basis HI, applicetur in angulo, vel sectione recta SGT parallela alteri basi AC, hæc omnino ad vtranque partem cum anguli lateribus, vel cum sectione conueniet, cum ipsa sit vna applicatarum ad diametrum BF. Occurrat ergo in S, T: Dico rectangulum SGT quadrato dimidiæ basis AC, siue quadrato FC æquale esse. Iun-

[a] Schol. 75. h. & per 1. Coroll. 40. h.



Iunctis enim rectis A I, G F, H C: patet has inter se a æquidistare, ac ideò ipsas proportionaliter diuidere rectas H G M I, C F M A inter eas interceptas in punctis G, F, M. Erit ergo, in singulis figuris, quadratum H G ad quadratum G M, vt quadratum C F ad quadratum F M, & permutando quadratum H G ad quadratum C F, vt quadratum G M ad F M; sed, in præsenti figura, est quadratum H G æquale rectangulo H M I vnà cum quadrato G M, & quadratum C F æquatur rectangulo C M A vnà cum quadrato F M, (cum rectæ H I, A C bifariam sectæ sint in G & F, & non bifariam in M) atque est totum quadratum H G ad totum C F vt pars ad partem, vel vt quadratum G M ad F M, ergo reliquum ad reliquum, nempe rectangulum H M I ad C M A, vel b rectangulum H G I ad T G S erit vt totum ad totum, siue vt quadratum H G ad quadratum C F, sed antecedentia sunt æqualia, hoc est rectangulum H G I, & quadratum H G, cum sit recta H G æqualis G I, ergo, & consequentia æqualia erunt, nempe rectangulum T G S, & quadratum C F. Quod in anguli portionibus demonstrandum erat. a Ibidem. b 76. h.

In reliquis autem figuris iam dicti tertij Schematismi, est rectangulum H G I ad rectangulum T G S, vt quadratum c contingentis E N ipsi H I parallelæ ad quadratum contingentis B N alteri A C æquidistantis, vel vt quadratum G M ad M F (nam ibi primo loco ostensum fuit in singulis esse E N ad N B, vt G M ad M F (vel ob parallelas A I, F G, C H, vt quadratum H G ad quadratum C F, atque antecedentia sunt æqualia, nempe rectangulum H G I quadrato H G, cum recta H G sit æqualis rectæ G I, ergo, & consequentia, siue rectangulum T G S quadrato C F æquale erit. Quod omnino ostendere propositum fuit. c 17. tertij Conic.

MONITVM.

CVM ad abscindendas *MAXIMAS*, & *MINIMAS* coni-sectionum portiones per punctum in ijs datum, animaduertissemus olim præmittendam esse inuestigationem æqualium portionum eiusdem coni-sectionis, quas deinde pro quacunque coni-sectione reperimus, atque vnica demonstratione confirmauimus, (vt visum est in 40. huius, ac simul vt in 45. eas omnes proprijs basibus similem, & concentricam eiusdem nominis sectionem contingere) ita dum *MAXIMAS*, ac *MINIMAS* Conorum, aut Conoidalium, vel Sphæroidalium solidorum portiones nobis duximus inquirendum, necesse fuit prius contemplari, quæ nam eiusdem Coni recti,

vel Conoidis, siue Sphæræ, aut Sphæroidis portiones inter se æquales essent: vnde mox venit nobis in animum perpendendi, an illæ inter se æqualitatem sortirentur, quarum portiones planæ genitricium sectionum ad plana basium erectæ, nempe quarum recti Canones inter se pariter æquales essent, prout æquales inspexeramus in Conoide Parabolico, ex 25. Archimedis in libro de Conoid. & Sphæroid. Res quidem ex cogitatione successit, tunc enim in sequentem vniuersalem demonstrationem incidimus, cuius, atque superioris quadragesimæ propositionis, solæ enunciationes, cum præstantissimis Geometris, Galileo, ac Torricellio communicatæ, tantos Viros, meruerunt habere laudatores.

THEOR. IL. PROP. LXXVIII.

Solidæ portiones eiusdem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, siue Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati, quarum recti Canones sint æquales, inter se quoq; æquales sunt.

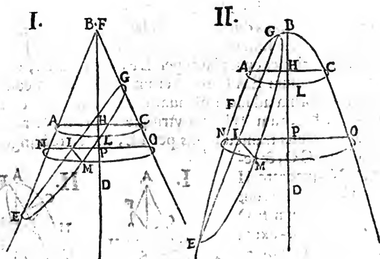
ESto Coni recti, vt in prima figura, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, siue Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati, vt in secunda, quorum axis BD, quælibet sectio per axem ABC, quæ erit [a] genitrix dati solidi, à qua demantur duæ æquales portiones planæ ABC, EFG (hoc autem fieri posse manifestum iam [b] est) quarum bases sint AC, EG bifariam sectæ in H, I, & ipsarum altera AC sit axi perpendicularis, altera verò vtcunque inclinata; & per eas concipiantur duci plana ALC, EMG ad planum per axem ABC erecta, auferentia portiones solidas ABC, EFG, quarum recti Canones erunt ipsæ portiones planæ ABC, EFG: patet sectionem ALC circulum esse, [c] cuius diameter AC, centrum H, atque EMG esse Ellipsim, cuius axis maior, in Cono, vel in Conoide Parabolico, aut Hyperbolico, atque in Sphæroide oblongo, erit ipsa basis EG, sed in prolato erit [d] minor axis, vbique autem centrum I. Dico huiusmodi solidas portiones ABC, EFG inter se æquales esse.

Secetur iterum datum solidum ABC, plano per punctum I transeunte, & ad axem BD erecto, siue plano ALC æquidistanti, quod in solido efficiet [e] pariter circulum NMO, cuius centrum P in axe, & diameter NO, quæ ipsi AC [f] æquidistabit, communis autem sectio recti plani NMO, cum alio plano EMG, erit [g] recta MI, quæ quidem recta erit [h] ad planum per axem ABC (cum ea sit communis sectio duorum planorum ad idem planum per axem erectorum) ideoque tùm ad circuli diametrum NO, tum ad EG axem Ellipsis, erit perpendicularis, & in Cono, aut Conoide, vel Sphæroide oblongo erit semi-axis minor, in prolato verò semi-axis maior. Et quoniam MI ad diametrum NO semi-circuli NMO est perpendicularis, erit quadratum MI æquale rectangulo NIO, sed & quadratum

[a] 12. Archim. de Conoid.
[b] ex 40 & ex 75. h.
[c] ex 1. primi huius, & ex 12. 13. 14. 15. Archim. de Conoid. &c.
[d] ibidem.
[e] 12. ibid.
[f] 16. Vnd. Elem.
[g] 3. ibid.
[h] 19. ibid.

dratum AH eidem rectangulo NIO est æquale, cum sit NIO [a] parallela ad AC, & per I punctum medium basis EG ducta, &c. ergo, & quadratum MI ipsi AH, seu linea MI lineæ AH æqualis erit, sed Ellipsis EMG ad circulum ALC est vt [b] rectangulum sub GI, & IM ad quadratum ex AH, vel vt linea GI ad AH (ob communem altitudinem MI) vel sumptis duplis, vt EG ad AC, ergo basis portionis solidę EFG, ad basim portionis solidę ABC, est vt EG basis Canonis EFG, ad AC basim Canonis ABC; verùm vt EG ad AC, ita [c] est reciprocè altitudo Canonis

[a] 77. h.
[b] ex 6. Archim. de Conoid.
[c] 65. h.



ABC ad altitudinem Canonis EFG (cum ipsi Canones ęquales facti sint) atque Canonum altitudines eædem sunt [d] cum altitudinibus solidarum portionum, vnde basis EMG ad basim ALC erit reciprocè, vt altitudo solidæ portionis ABC ad altitudinem solidæ EFG: hæ autem portiones sunt solida [e] Acuminata proportionalia, eò quod ipsarum Canones sint æquales, atque bases altitudinibus sunt reciprocæ, ergo huiusmodi portiones solidæ ABC, EFG sunt [f] æquales. Quod demonstrandum erat.

[d] 3. Schol. 69. h.
[e] Coroll. 70. h.
[f] 74. h.

Sed hoc idem, tribus proximè præcedentibus propositionibus omissis, super nouo diagrammate sic ostendere conabimur.

ALITER.

SIt Conus rectus, vt in prima figura, vel aliud quodcunque prædictorum solidorum, vt in secunda, circa axim AB, & sectio per axim sit EAD, quæ genitrix erit [g] dati solidi, à qua demptæ sint duæ quælibet portiones planæ æquales CAD, EAF, quarum bases sint CD, EF, & per ipsas ducantur plana secantia data solida, & ad ipsum planum per axem EAD erecta, circulos, vel [h] Ellipses EOF, CPD describentia (quarum maiores axes in Cono, Conoide Parabolico, Hyperbolico, & Sphæroide oblongo

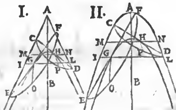
longo

[g] ex 12. Archim. de Conoid. &c.
[h] ex prima primi huius, & ex 13. 14. 15. Arch. de Conoid. &c.

a ibidem. longo erunt a ipsę CD, EF, in prolato verò erunt axes minores) auferentiaque solidas portiones CAD, EAF, quarum recti Canones erunt ipsæ æquales portiones planæ CAD, EAF. Dico tales portiones solidas inter se æquales esse.

b 4. sec. Conic & 5.6.7 primi huius. c 68. h. Nam bifariam sectis EF in G, & CD in H, patet puncta G, H esse centra circulorum, siue Ellipsium EOF, CPD; & si per punctum G describatur b in vtraque figura eiusdem nominis Coni-sectio GH, quę similis sit, & concentrica sectioni EAD, & qualis in Monito post 68. h. definiuimus, patet inquam ipsam sectionem GH omnino transire per H, simulque EF, & CD in punctis medijs G, H c contingere.

d 4. primi Conic. & 12. Arch. de Conoid. &c. e 3. vnd. Elem. f 19. ibid. Iam ductis per G, H, rectis IGL, MHN ad axem AB perpendicularibus, concipiantur per ipsas duci plana ad planum per axem EAD erecta, quæ efficient in exteriori solido circulos d circa diametros IL, MN, & communes eorum sectiones cum planis per EF, CD ductis, erunt e rectæ GO, HP, quæ ad planum EAD rectæ erunt f (sunt enim communes sectiones duorum planorum ad idem planum erectorum) hoc est, tùm OG cum vtrisque EF, IL, tùm PH cum vtrisque CD, MN rectos efficiet angulos; vnde in circulis transeuntibus per IL, MN, rectangulum IGL æquabitur quadrato GO, & rectangulum MHN quadrato HP, atque ipsæ GO, HP erunt circulorum, aut Ellipsium EOF, CPD minores semi-axes, in Cono tamen, vel Conoide Parabolico, aut Hyperbolico, vel in Sphæroide oblongo; nam in prolato, erunt maiores semiaxes: sed rectangula IGL, MHN sunt g æqualia, vtrunque



g 3. Coroll. 46. h. enim æquatur quadrato semi-tangentis per verticem interioris sectionis, &c. ergo, & quadrato GO, HP æqualia erunt, siue semi-axis GO æqualis semi-axi HP; sed circulus, aut Ellipsis EOF ad CPD, est vt h rectangulum sub EF, GO, ad rectangulum sub CD, HP, & rectangulum sub EF, GO ad rectangulum sub CD, HP est vt EF ad CD (cum eorum latitudines GO, HP sint æquales) ergo circulus, vel Ellipsis EOF ad CPD erit in solido Parabolico, vel Hyperbolico, aut Sphæroide oblongo, vt maior axis EF ad maiorem axim CD, vel in Sphæroide prolato, vt minor axis EF ad minorem CD: sed EF ad CD est i vt altitudo Canonis CAD, ad altitudinem Canonis EAF, cum ipsi sint æquales portiones eiusdem coni-sectionis, & horum Canonum altitudines sunt l eædem, ac altitudines solidarum portionum CAD, EAF, quare circulus, vel Ellipsis EOF ad CPD, erit reciprocè vt altitudo solidæ portionis CAD, ad altitudinem solidæ EAF: at huiusmodi portiones sunt m solida Acuminata proportionalia, & ipsorum bases altitudinibus reciprocantur, ergo ipsæ solidæ portiones inter se sunt n æquales. Quod erat demonstrandum.

h 7. Arch. de Conoid. &c. i 65. h. l 3. Schol. 69. h. m Coroll. 70. h. n 74. h.

CO-

COROLL. I.

HInc colligitur, quod puncta media rectarum quarumlibet applicatarum in sectione per axem ducta, cuiuscunque prædictorum solidorũ, sunt centra basium earum portionum solidarum à planis per easdem rectas ductis, atque ad eandem sectionem per axem erectis abscissarum.

Nam puncta media G, H, applicatarum E F, C D demonstrata sunt esse centra prædictarum basium E O F, C P D, &c.

COROLL. II.

PErspicuum est quoque, bases solidarum portionum inter se æqualium eiusdem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, habere inter se axes minores æquales, siue esse æqualium latitudinum, ac ideò esse inter se, vt axes maiores, vel vt bases rectorum Canonum. Bases verò æqualium portionum eiusdem Sphæroidis prolati habere maiores axes æquales, ac propterea esse inter se vt axes minores, vel vt bases eorundem rectorum Canonum.

Etenim, in præcedentibus figuris, de basibus E O F, C P D (vel sint Circuli, vel Ellipses) portionum solidarum E A F, C A D, quas æquales esse demonstrauimus, ostensum prius fuit semi-axes minores G O, H P in Cono recto, vel Conoide, aut Sphæroide oblongo esse æquales, ac ideò, & eorum duplos, hoc est integros minores axes æquales esse; & paulò post circulum, vel Ellipsim E O F ad C P D esse vt maior axis E F ad maiorem C D, vel vt basis recti Canonis E A F, ad basim recti Canonis C A D. In Sphæroide autem prolato demonstratum est ipsas G O, H P maiores semi-axes, item æquales esse, siue integros maiores axes æquales, & postea circulos, vel Ellipses E O F, C B D habere inter se eandem rationem, ac ipsi minores axes E F, C D; nimirum esse inter se, vt sunt bases rectorum Canonum E A F, C A D.

THEOR. L. PROP. LXXIX.

Solidæ portiones eiusdem Coni recti, vel cuiuscunque Conoidis, vel Sphæræ, aut cuiuslibet Sphæroidis tunc æquales sunt, qnando, in Cono, portionum axes pertingant ad idem Conoides Hyperbolicum concentricum, &c. In Conoide verò Parabolico, quando portionum axes sint æquales. At in Conoide Hyperbolico, Sphæra, aut quocunque Sphæroide, quando portionum axes, ad proprias semi-diametros ijsdem axibus in directum positas, sint in vna eademque ratione.

ETenim quandò in portionibus eiusdem cuiuscunque prædictorum solidorum diametri rectorum Canonum habuerint relatiuè conditiones superiùs

superiùs allatas, ipsi Canones recti, qui iam sunt portiones, vel anguli, vel coni-sectionis, aut circuli, æquales iam sunt ostensi, vti de anguli portionibus patet ex prima parte 45. huius, pro reliquis autem Coni-sectionibus, &c. ex 40. sed dum huiusmodi Canones recti sunt æquales, & portiones solidæ demonstrantur æquales, ex superiori Theoremate, suntque rectorum Canonum diametri [a] eædem, ac axes solidarum, quare, & dum diametri rectorum Canonum, siue dum axes solidarum portionum respectiuè seruabunt, quod modò exposuimus, ipsæ portiones solidæ æquales erunt. Quod erat, &c.

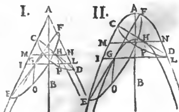
a 3. Schol. 69. h.

Itaque prop. 25. præcitati libri Archimedis, quæ solùm de portionibus Conoidis Parabolici differit, supposita etiam proportione Conoidis ad sibi inscriptum Conum, nobis hic est præsens Theorema, quod generaliter proponit ea, quæ ad cognitionem faciunt æqualium portionum, cuiuslibet simul prædictorum solidorum, atque ipsa diuersa ratiocinatione confirmat, nulla habita ratione proportionis, quæ cadit inter solidas portiones, & inscriptos Conos, aut circumscriptos Cylindros.

THEOR. LI. PROP. LXXX.

Omnes solidæ portiones eiusdem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, siue Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati, quarum bases contingant eandem similis, & inscripti concentrici solidi superficiem, inter se sunt æquales, & ad centra basium eandem superficiem contingunt.

Repetito secundo Schemate præcedentis 78. iisdemque positis, quæ ibi, si concipiantur figuræ conuerti circa axim A B, procreabitur denuò à sectione E A F datum solidum, & à sectione G H inscriptum simile solidum concentricum. Ampliùs si fuerint quotcunque rectæ EF, C D, &c. interiorem sectionem G H contingentes, per quas agantur plana E O F, C P D ad ipsas sectiones recta, hæc abscindent de exteriori solido portiones solidas E A F, C A D,



atque erunt earundem portionum bases, quæ concentrici solidi G H superficiem contingent [b] in iisdem punctis G, H, in quibus rectæ E F, C D sectionem G H contingunt, quæ puncta, per iam demonstrata, sunt [c] centra ipsarum basium, sed huiusmodi portionum solidarum E A F, C A D, Canones

b 55. h.
c Coroll. 1. 78. h.

niones E A F, C A D (qui, ex constructione, sunt ad plana basium recti) sunt [a] æquales, ergo & ipsæ solidæ portiones æquales [b] erunt. Vnde omnes solidæ portiones eiusdem Coni recti, vel cuiuslibet prædictorum solidorum, quarum bases contingant eiusdem similis, & concentrici solidi superficiem inter se sunt æquales, & ad centra basium eandem superficiem contingunt. Quod ostendere propositum fuerat; quodque Cl. Tor. inter proprios pugillares geometricos regerere non est dedignatus: animo, vt opinari libet, huiusce haud iniucundi Theorematis, à me ipsi tantummodo expositi demonstrationem inquirendi, quam postea solùm de Coni portionibus nactus fuit, vel potiùs circa ipsas tantùm placuit ei meditari: eminentissimi enim, ac propè diuini ingenij Vir, & de aliorum solidorum portionibus feliciùs quàm à nobis superiùs factum sit, hoc idem reperisset, si tantillùm excogitasset: verùm proprias, ac ideò sublimiores contemplationes affectans, ab his nugis meis fortasse se abstinuit.

a 45. h.
b 78. h.

SCHOLIVM.

Hic autem animaduertendum est, quod nihil refert vtrùm bases, huiusmodi portionum solidarum inscriptum solidum concentricum contingant ad puncta eiusdem sectionis solidum genitricis, vel diuersarum: nam omnes genitrices sectiones eiusdem solidi concentrici, se mutuò secant in eodem vertice axis reuolutionis prædicti solidi; sed omnes portiones solidæ exterioris, quæ quamlibet solidi interioris genitricem sectionem per centra earum basium contingunt, æquales ostendi possunt per superiorem prop. 78. eidem tertiæ portioni solidæ ab ipso exteriori solido abscissæ, ei nempe, cuius basis transiens per axis verticem ad eundem axim sit recta, circulum in sectione efficiens; ergo omnes prædictæ portiones solidæ, vbicunque earum bases contingant superficiem similis, & concentrici inscripti solidi, inter se æquales erunt, cum tertiæ cuidam portioni sint æquales, &c.

THEOR. LII. PROP. LXXXI.

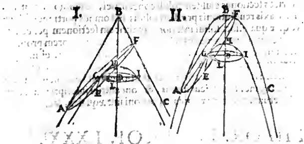
Si planum ductum per axem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati à quadam recta linea secetur, per quam ductum sit planum, quod ad planum per axem rectum sit: solidi portio, quæ per hoc planum abscinditur, MINIMA est omnium portionum à quibuslibet alijs planis per eandem rectam ductis abscissarum.

Esto quodlibet prædictorum solidorum A B C, cuius axis reuolutionis sit B D, & planum per axem ductum sit A B C vbicunque sectum à quadam recta A F, ad vtranque partem sectioni occurrente, per quam concipiatur duci planum A E F ad ipsum A B C rectum; portionem ex solido

abſcindens A B F, cuius baſis ſit A E F, & Canon rectus A B F. Dico hanc ſolidam portionem *MINIMAM* eſſe earum, quæ à quocunque alio plano per eandem A F ductoex dato ſolido abſcindi poſſunt.

Diuidatur A F bifariam in G, & per G in plano per axem A B C deſcribatur [a] in prima figura (exhibente Conum) Hyperbole G H I, cuius aſymptoti ſint B A, B C; in ſecunda verò (quodcunque aliorum ſolidorum repræſentante) deſcribatur [b] coni-ſectio G H I ſimilis, & concentrica ſectioni A B C, quæ in vtraque figura omnino continget rectam A F in G, (nam ſi alia eſſet contingens per G ſectionem G H I, ipſa producta ad vtranque partem exteriori ſectioni A B C occurreret, ac bifariam ſecaretur [c] in G: vnde duæ applicatæ per G in ſectione A B C ſe mutuò bifariam ſecarent, quod eſſet contra 26. ſec. Conic., quæ vnicuique coni-ſectioni inſeruit, licet de ſola Ellipſi, vel Circulo agat, ſed hoc idem, & pro angulo ſimul, aliter paret, ex primo Coroll. 68.h.) & concipiatur circa communem axim BDH ſectionẽ GHI in gyrum conuerti: patet hanc deſcribere ſolidum G H I ſimile, & concentricum exteriori A B C; & cum recta A F contingat ſectionem G H I in G, & per A F ductum ſit planum A E F ipſi plano per axem G H I perpendiculare, hoc ipſum continget [d] concentrici ſolidi ſuperficiem in puncto G.

[a] 4. ſec. Conic.
[b] 5. 6. 7. primi h.
[c] Coroll. 45. h.
[d] 55. h.



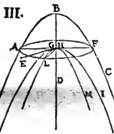
Ponatur primò punctum G eſſe extra axis verticem H, & per G intelligatur duci planum G L I ad axem erectum, quod in ſolido G H I circulum efficiet [e] centrum habentem in axe, vt in D, & cuius communis ſectio cum plano per axem erit diameter G D I, cum alio autem plano A E F erit recta E G, quæ cum ſit communis ſectio duorum planorum ad planum A B C erectorum, erit ad idem planum [f] recta, ac ideo cum diametro G D I rectum conſtituet angulum E G I, ſiue ipſa E G in puncto tantùm G circulum continget.

[e] 4. primi Conic. & 12. Arch. de Conoid. &c.
[f] 19. vnd. Elem.

Iam intelligatur per A F aliud planum duci ad planum per axem A B C non erectum (ſed tale quod de exteriori ſolido aliam terminatam ſectionem abſcindat) cuius communis ſectio cum circuli plano diuerſa erit à linea G E (planum enim nunc ductum conuenit cum plano A E F per rectam tantùm A F.) Sit ipſa G L. Et quoniam G E rectos facit angulos cum G I, ipſa

G L cum eadem G I haud rectos efficiet, vnde producta hinc inde ad alteram partem cadet intra circulum G L I, eius peripheriæ occurrens in L. Cum ergo G L sit tota intra circulum, circulus verò totus intra solidum, erit quoque G L tota intra solidum: quare planum, quod per A F, & G L ductum fuit, secabit omnino interius solidum G H I, de quo aliquam terminatam portionem abscindet (cum idem planum vndique productum de exteriori solido ponatur quoque portionem quandam auferre) cuius conuexa superficies tota erit intra portionem exterioris solidi ab eodem plano abscissam.

Si verò punctum G (quod nuper ostẽsum fuit esse cõtactum plani per A F ducti, ad planum per axem A B C recti, cum interioris solidi G H I superficie) fuerit in ipso axis vertice H, vt in hac tertia figura, ostendetur etiam quodlibet aliud planum A L F per rectam A F ductum, sed ad planum per axem A B C inclinatum, quodque de exteriori solido aliquam portionem abscindat, omnino secare interius solidum, ideoque de ipso quandam portionem terminatam auferre.



Nam, in prædicto contingente plano A E F, ducta per G quacumq; recta G E cũ G A quemlibet angulum constituente, & per rectam G E, ac per axim G D ducto alio plano, id in interiori solido describet genitricem *a* sectionem L G M, quam cõtinget in G recta G E eorundem planorum communis sectio, cum hæc ponatur esse in plano contingente vniuersam solid. superficiem, sed planum inclinatum A L F vndiq; productum ad alteram partium, vtputa ad E, cadit infra contingens planum, cum eo commune habens tantùm rectam A F, ergo & communis sectio ipsius plani inclinati cum sectione L G M, nempe recta G L cadet infra idem planum contingens, ac ideo infra rectam G E; sed G L, & G E sunt in plano L G M, atque G E ipsam sectionem contingit, vt modò ostendimus, quare G L, quæ cadit infra G E cadet omnino *b* intra sectionem L G M, siue intra solidum, ac propterea planum inclinatum, quod per A F, & G L ducitur, secabit omnino interius solidum, ac de ipso quandam terminatam portionem auferet, cum idem planum inclinatum ponatur de exteriori terminatam portionem abscindere.

a 12. Archim. de Conoid. &c.

b 32. primi conic.

Itaque, cum in vtroque casu demonstratum sit, planum inclinatum transiens per A F, & G L, de interiori solido G H I aliquam portionem secare, possibile *c* erit ipsi plano, hoc est basibus vtriusque portionis, aliud planum æquidistans ducere, quod interioris portionis superficiem contingat: quare si mente concipiatur iam hoc ductum esse, ac vndique productum, patet hoc ipsum planum contingens, de prædicta exteriori portione dempta à plano per A F, & G L ducto, aliam portionem abscindere, sed illa omninò minorem (pars enim suo toto minor est) at hęc minor portio æqualis est *d* portioni A B F abscissæ à plano, quod per A F ductum fuit ad planum per axem A B C rectum (vtraque enim talium portionum terminatur à planis basium,

c 69. h.

d ex Sch. Prop. 80. huius.

eiusdem similis concentrici solidi superficiem contingentium) ergo, & portio ABF à prædicto plano recto abscissa, erit minor eadem portione, quæ dempta fuit à plano per AF, & GL ducto, siue à plano, quod in constructione per AF obliquè ductum fuit super planum per axem ABC: & hoc semper verum esse demonstrabitur, quodcunque sit planum inclinatum transiens per AF; ergo portio solida ABF, quæ ex dato solido à plano per AF ducto, & ad planum per axem ABC erecto abscinditur, *MINIMA* est omnium portionum à quibuslibet alijs planis per eandem AF ductis abscissarum. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EX eo, quod prope finem huius demonstratum est, elicitur, omnem portionem cuiuscunque prædictorum solidorum, cuius basis secet simile inscriptum solidum concentricum, maiorem esse qualibet alia portione de eodem exteriori solido, cuius basis contingat idem inscriptum solidum.

Ibi enim ostendimus prædictam exterioris solidi portionem, cuius basis secet inscriptum solidum, maiorem esse ea, cuius basis contingens idem inscriptum, simul sit parallela secanti basi; sed omnes portiones de eodem solido, quarum bases contingant idem simile inscriptum concentricum, inter se sunt [a] æquales: ergo patet propositum, &c.

[a] Propos. 80. h.

PROBL. XV. PROP. LXXXII.

Per datum punctum intra Conum rectum, vel Conoides Parabolicum, aut Hyperbolicum, siuè Sphæram, aut Sphæroides oblongum, vel prolatum, planum ducere, quod de solido abscindat portionem MINIMAM; atque in Sphæroide, vel Sphæra portionem MAXIMAM.

ESto quodlibet prædictorum solidorum ABC, cuius axis reuolutionis sit BD, ac datum vbicunque intra solidum sit punctum E: oportet per E planum ducere, quod ex dato solido abscindat portionem *MINIMAM*, atque ampliùs in Sphæroide, vel Sphæra, portionem *MAXIMAM*. Oportet autem si solidum fuerit Sphæroides, vel Sphæra, quod datum punctum non sit idem, ac centrum, tunc enim neque *MAXIMA*, neque *MINIMA* portio exhiberi posset, cum omnia plana per centra eorum solidorum ducta in duas æquas portiones diuidant ipsa solida; veluti in Ellipsi, vel circulo dum quærebatur *MAXIMA*, & *MINIMA* portio, necesse fuit datum punctum non esse in centro, cum rectæ omnes per ipsum ductæ, huiusmodi superficies bifariam secent, vt iam satis constat.

Secetur solidum plano per axem BD, ac per datum punctum E transeunte, efficienteque in solido [b] genitricem sectionem ABC, quæ indefinitè producatur, ac de ipsa per idem punctum E, cum recta FEG abscin-

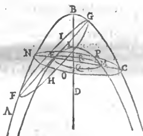
[b] 12. Archim. de Conoid. &c.

datur

datur [a] *MINIMA* portio plana F B G, & per eandem F E G agatur planum F H G I, quod ad ductum per axem A B C rectum sit. Dico tale planum F H G quæsitum soluere, siue de dato solido auferre portionem solidam F B G *MINIMAM* omnium, quæ ex eodem solido à quibuslibet alijs planis, per idem punctum E ducibilibus, abscindi possunt. a 41.42.h.

Iam patet primò portionem F B G *MINIMAM* esse [b] aliarum portionum abscissarum à planis, transeuntibus quidem per rectam F G, ac ideo per datum punctum E, non autem rectis super planum per axem A B C. Verùm quod sit quoque *MINIMA* abscindendarum ab alijs planis non per rectam F G, sed omnino per punctum E ducibilibus, sic demonstrabitur. b 81. h.

In plano enim per axem A B C descripta per punctum E (quod bifariam secat applicatam F G, vti elicitur ex 41. & 42. huius) simili, & concentrica sectione E L M; ipsa recta F G continget [c] in E: & facta reuolutione ipsius sectionis E L M circa eundem axim B D, describetur simile concentricum solidum, quod continget [d] planum F H G I in E; itaque ducto per datum punctum E quolibet alio plano non per F G transeunte, sed neque per axim B D; (tunc enim planum hoc, datum solidum in duas partes diuideret, quarum vtra esset quidem maior portione F B G, quoniam vel esset infinitæ magnitudinis, si datum solidum fuerit Conus, vel Conoides, vel esset solidi dimidium, si fuerit Sphæroides, vel Sphæra, ac propterea omnino esset maior portione F B G, quæ dimidio occlusi solidi minor est, cum extra ipsam sit centrum; nam centrum *MINIMAE* portionis planæ F B G, quod idem est, ac centrum solidi, iam constat esse extra ipsam portionem, quando datum punctum E in sectione sit extra centrum, vt ponitur) patet id iuxta quandam rectam N E M C necessariò secare planum per axem A B C, in quo est punctum E. Et quoniam F G sectionem E L M contingit in E, recta N C, quæ per E ponitur transire, omninò secabit interiorem sectionem E L M, siue per aliquam sui partem, vt puta per E M, tota cadet intra sectionem E L M; sed sectio E L M tota est intra concentricum inscriptum solidum, cum sit ducta per axem, quare, & ipsa recta E M tota erit intra solidum inscriptum, vnde planum, quod modò per ipsam duximus, quodque de exteriori aufert solidam portionem N B C, cuius basis est N O C P, secabit prorsus interius solidum, deque ipso quandam solidam portionem abscindet, nimirum E L M, cuius basis sit E Q M R: portio igitur N B C, cuius basis est N O C P interius solidum secans, maior erit [e] portione F B G, cuius basis est F H G I idem interius solidum contingens, & hoc semper, quodcunque sit planum transiens per datum punctum E præter planum F H G I. Quare ex dato solido A B C per datum punctum E abscissa est *MINIMA* portio F B G. Quod faciendum erat. c 1. Corol. 68. h. d 55. h. e Schol. 81. h.



CO-

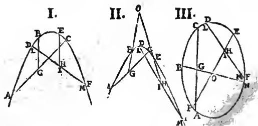
COROLL.

SI datum solidum fuerit quodcunque Sphæroides, vel Sphæra; patet reliquam portionem solidam, dempta *MINIMA* nuper inuenta, esse *MAXIMAM* quæsitam.

THEOR. LIII. PROP. LXXXIII.

Conuersum Prop. 79. h. Æquales portiones solidæ eiusdem Conoidis, vel Sphæræ, aut cuiuslibet Sphæroidis, si fuerint de eodem Conoide Parabolico habebunt axes æquales. Si de eodem Hyperbolico, vel de Sphæra, aut Sphæroide quocunque, erunt axes proprijs semi-diametris proportionales. At si fuerint de eodem Cono recto, extrema ipsorum axium pertingent ad idem inscriptum solidum simile, & concentricum.

SInt duæ de eodem quocunque prædictorum solidorum portiones æquales, quarum recti Canones concipiantur transferri super eadem sectione ABF per solidi axem ducta (hoc enim fieri posse manifestum est, cum ipsi recti Canones intra solidas portiones intercepti, sint portiones eiusdem sectionis, quæ in reuolutione circa axim solidum genuit) & sint ABC, DEF, quarum bases sint AC, DF, & diametri BG, EH, quæ simul sunt



a 3. Schol. 69. h. axes solidarum a portionum. Dico, in prima figura exhibente Conoides Parabolicum, axes BG, EH esse inter se æquales, & in secunda exhibente Hyperbolicum, atque in tertia Sphæram, vel Sphæroides, quarum centra sint O, esse axim HE ad semi-diametrum EO, vt axis GB ad semi-diametrum BO.

Ex altero axium, videlicet ex EH, secetur in prima figura segmentum EI ipsi BG æquale; & in reliquis, fiat OE ad EI, vt OB ad BG, in omni-

omnibus verò per I applicetur ordinatim ad E I recta L I M, quæ rectæ D F æquidistabit, & per ipsam L I M concipiatur duci planum, quod plano per D F transeunti, siue basi portionis solidæ D E F æquidistet, aliam portionem solidam abscindens L E M, quæ portioni solidæ A B C a æqualis erit; sed ponitur etiam D E F eidem A B C æqualis; ergo duæ L E M, D E F inter se æquales erunt, sed vtraque est de eodem solido, circa communem axim E H I, & super bases parallelas, quare planum basis ductum per L M, congruet cum plano basis, quod transit per D F, vnde, & axis terminus I, cum termino axis H. Erit ergo axis E I æqualis axi E H. Sed in prima, factus fuit E I æqualis B G, & in reliquis O E ad E I, vt O B ad B G, quare axis quoque E H, in prima, æquabitur axi B G, in alijs verò erit O E ad E H, vt O B ad B G, & conuertendo H E ad E O, vt G B ad B O. a 79. h.

Sint tandem duæ æquales portiones de eodem Cono recto A B C, D B E, quarum recti Canones concipiantur coaptari super eadem sectione A B E per solidi axem ducta, & sint A B C, D B E, quarum bases A C, D E, & diametri B F, B G, (quæ iam sunt b axes solidarum portionum,) Et per F cum asymptotis B A, B C describatur Hyperbole F G; quæ omnino continget c A C in F, termino axis B F. Dico iam extremum G axis B G, ad eandem quoque sectionem pertingere: hoc est sectionem F G secare diametrum B G in puncto G. Si possibile est sectio F G alibi secet axim B G, vt infra G in puncto H, & per H ducatur L H M ipsi D E æquidistans: erit D G ad G E, vt L H ad H M, estque D G æqualis G E, quare L M quoque bifariam secta erit in H: sed dicitur per H transire sectionem; ergo L M ipsam d continget in H, quapropter portio plana L B M æquabitur e portioni A B C, & si per L M agatur planum secans Conum, & ad planum L B M rectum, quod & plano datæ portionis solidæ D B E per D E ductum æquidistabit, cum hoc ad idem planum L B M ponatur rectum esse; erit solida portio L B M æqualis f portioni A B C, cum earum recti Canones L B M, A B C æquales sint ostensi; sed D B E quoque eidem A B C data est æqualis, ergo duæ portiones L B M, D B E simul æquales erunt, totum suæ parti, quod est absurdum: non ergo sectio F G secat axim B G infra H; & ob eandem rationem neque supra; ergo sectio F G omnino transibit per G extremum axis B G; sed facta reuolutione anguli, ac sectionis circa communem axim procreatur Conus, & Conoides Hyperbolicum simile, ac concentricum: ergo F, G, extrema puncta axium æqualium portionum solidarum A B C, D B E, ex eodem Cono recto, pertingunt ad idem Conoides Hyperbolicum simile, & concentricum inscriptum. Quod vltimò demonstrandum erat.

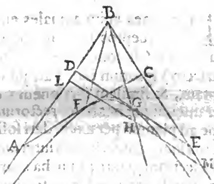
b 3. Schol. 69. h.

c 1. Coroll. 68. h.

d ibidem.

e 45. h.

f 78. h.



THEOR. LIV. PROP. LXXXIV.

Conuerſ. Prop.78. huius. Æquales portiones de eodem ſolido, quodcunque ſit ex ſæpius memoratis, habent Canones rectos, in ipſis interceptos, inter ſe æquales.

a83.h. ETenim huiuſmodi portiones ſolidæ æquales, habent axes, a vel inter ſe æquales, vel proprijs ſemi-diametris proportionales, vel ad idem Conoides ſimile concentricum, & inſcriptum pertingentes, ſed ijdem axes ſunt quoque b diametri prædictorum Canonum, & quando hæ diametri habuerint conditiones huiuſmodi, ipſi Canones recti ſunt c æquales, ergo ſolidæ portiones æquales, habebunt rectos Canones inter ſe æquales. Quod erat, &c.

b 3.Schol. prop. 69. huius. c 40.h. & ex45.h.

THEOR. LV. PROP. LXXXV.

Conuerſ. Prop.80. huius. Baſes æqualium portionum ex eodem quocunque prædictorum ſolidorum, ſuperficiem eiuſdem ſimilis inſcripti ſolidi concentrici ad earum centra contingunt.

POrtiones enim æquales eiuſdem ſolidi habent rectos Canones in ipſis interceptos inter ſe d æquales, ſed quando huiuſmodi Canones ſunt æquales (ſi concipiantur tranſlati ſuper eandem ſectionem ſolidi genitricem) ipſorum baſes ad puncta media, eandem concentricam, inſcriptam, & ſimilem ſectionem e contingunt, & baſes ſolidarum portionum tranſeunt per has baſes rectorum Canonum, atque ad eos ſunt erectæ, nempe ad planum per axem dati ſolidi, quare eędem baſes ſolidarum portionum contingent ſuperficiem interioris ſolidi concentrici ab inſcripta concentrica ſectioni geniti (dum hæc circa axim conuertatur) ad eadem puncta, f in quibus baſes planarum, ſectionem interiorem contingunt; quę puncta ſunt centra axium, vel baſium ſolidarum portionum ex Archimede, & ex iam à nobis animaduerſis.

d 84. h. e 68. h. f 55. h.

THEOR. LVI. PROP. LXXXVI.

Solidæ portiones eiuſdem Coni recti, vel Conoidis, ſiue Sphæræ, aut Sphæroidis, quarum axes (pro Cono recto) pertingant ad idem inſcriptum concentricum Conoides Hyperbolicum (vel pro Conoide Parabolico) ſint æquales (ſiue pro reliquis) ad proprias ſemi-diametros eandem habeant rationem, habent baſes altitudinibus reciprocè proportionales.

Eſto vt ponitur dico, &c.

Prop. 79. huius. ETenim cum axibus huiuſmodi ſolidarum portionum inſint prædictæ conditiones, ipſæ portiones ſolidæ æquales g erunt, pariterque earum

recti

recti Canones erunt *a* æquales (eo quod ijdem sint *b* axes solidarum, & diametri Canonum) ac propterea ipsorum bases altitudinibus erunt *c* reciprocè proportionales, sed in æqualibus portionibus de eodem solido, vt sunt bases rectorum Canonum ita sunt *d* bases solidarum portionum, & altitudines tùm portionum, tùm Canonum sunt *e* eædem, ergo in datis portionibus, quibus insunt prædictæ conditiones, erunt quoque bases altitudinibus reciprocè proportionales. Quod erat, &c. *a* 84. h. *b* 3. Schol. 69. h. *c* 65. h. *d* 2. Coroll. 78. h. *e* 3. Schol. 69. h.

THEOR. LVII. PROP. LXXXVII.

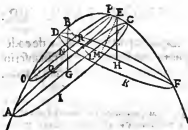
Æquales portiones solidæ de eodem Conoide, vel Sphæra, aut quocunque Sphæroide, vel etiam de Cono recto, habent bases altitudinibus reciprocè proportionales: & è conuerso.

Si bases portionum de eodem solido fuerint altitudinibus reciprocè proportionales, ipsæ portiones æquales erunt.

QVando enim huiusmodi portiones solidæ sunt æquales, necessariò earum axes (si portiones fuerint de eodem Conoide Parabolico) erunt æquales (si de eodem Hyperbolico, aut Sphæra, aut Sphæroide) erunt *f* proprijs semi-diametris proportionales; sed in his casibus eædem portiones solidæ habent *g* bases altitudinibus proportionales, ergo, & cum portiones de eodem quocunque prædictorum solidorum fuerint æquales, ipsarum bases altitudinibus reciprocabuntur. *f* 83. h. *g* 86. h.

De portionibus autem æqualibus eiusdem, vel etiam diuersi Coni recti, aut obliqui, iam id ostensum fuit à Commandino in Comment. super Archim. de Conoid. &c. Quod erat primò, &c.

PRæterea sint duæ solidæ portiones A B C, D E F de eodem solido, quodcunque sit ex prædictis (quæ tamen in Sphæroide non excedant eius dimidium) quarum axes sint B G, E H, & bases A I C, D K F, altitudines verò B L, E M, & sit basis A I C ad D K F reciprocè, vt altitudo E M ad B L. Dico has portiones inter se æquales esse.



Concipiantur ipsarum solidarum portionum recti Canones A B C, D E F, quorum diametri, & altitudines eædem *b* erunt atque axes, & altitudines solidarum portionum. *b* 3. Schol. 69. h.

Iam, si huiusmodi Canones sunt æquales, & portiones solidæ æquales *i* erunt. At si dicatur eos inæquales esse, alter ipsorum, vt puta A B C, altero D E F maior erit: vnde *i* 78. h.

Q & dia-

& diameter B G erit æquo maior: si igitur ipsa ad æquum reducatur in N, ita vt, vel B N sit æqualis ipsi E H, (dum solidum fuerit Conoides Parabolicum,) vel ita vt B N, & E H ad proprias semi-diametros sint in eadem ratione,) dum solidum fuerit Hyperbolicum, vel Sphæra, aut Sphæroides;) vel ita vt eędem pertingant ad eandẽ similem concentricam sectionem inscriptã; erit B N omnino minor B G, & si per N agatur ipsi A C ęquidistans O N P, quę ad eandem diametrum B G erit ordinatim ducta, atq; minor ipsa A C, fiet portio, seu Canon O B P æqualis [a] portioni, siue Canoni D E F, & ipsa O P secabit B L in R, eritque B R altitudo Canonis O B P, cum ob parallelas sit angulus B R N rectus: & si per rectam O P ducatur planum O Q P, quod basi A I C sit parallelum, siue rectum ad Canonem A B C, id abscindet ex dato solido portionem O B P, cuius altitudo erit B R eadem atque Canonis O B P. Cumque Canon O B P æqualis sit Canoni D E F, erit solida portio O B P [b] æqualis solidæ portioni D E F, ac ideo vt basis O Q P ad basim D K F, ita [c] reciprocè altitudo E M ad altitudinem B R, estque basis D K F ad basim A I C, ex hypothesi, vt altitudo B L ad altitudinem E M, quare, ex æquali in ratione perturbata, erit basis O Q P ad basim A I C, vt altitudo B L ad altitudinem B R, sed est B L maior B R, ergo & basis O Q P maior erit basi A I C, quod est falsum, cum sit minor, eò quod O P diameter Ellipsis, aut circuli O Q P minor sit homologa diametro A C similis [d] Ellipsis, vel circuli A I C. Non erit ergo Canonum A B C, D E F alter altero maior, quare inter se æquales esse necesse est: ideoque, & portiones solidæ A B C, D E F ęquales [e] erunt. Quod secundò ostendere propositum fuit.

[a] 40. h. & ex 45. h.
[b] 78. h.
[c] ex prima parte huius.
[d] Coroll. 15. Arch. de Conoid. &c.
[e] 75. h.

THEOR. LVIII. PROP. LXXXVIII.

Æquales portiones solidæ de eodem quocunque Conoide, aut Sphæra, aut Sphæroide ad sibi inscriptam Coni portionem, vel ad circumscriptum Cylindricum, vnam, eandemque simul habent rationem.

Etenim huiusmodi portiones habent bases altitudinibus reciprocè proportionales, vt in præcedenti, primo loco demonstratum est, sed bases, & altitudines portionum eædem sunt, ac bases, & altitudines inscriptarum Coni portionum, quare, & Coni portionum bases ipsarum altitudinibus erunt reciprocè proportionales, sed eædem portiones Conorum sunt

inter

inter se *a* solida Acuminata proportionalia, & bases altitudinibus reciprocantur, vnde Coni portiones inscriptæ inter se æquales *b* erunt; erit ergo solida portio ad portionem æqualem de eodem solido, vt inscripta Coni portio ad inscriptam Coni portionem (ob æqualitatem) & permutando solida portio ad sibi inscriptam Coni portionem, vt altera æqualis portio ad sibi inscriptam Coni portionem, & sumptis consequentium *c* triplis, solida portio ad circumscriptum Cylindricum, vt reliqua portio ad sibi circumscriptum Cylindricum, &c. Quod erat, &c.

a 70. h.
b 74. h.
c ex Command. in lib. de Conoid. & Sphæroid. Archim.

THEOR. LIX. PROP. LXXXIX.

MAXIMA portionum eiusdem Coni recti, aut Conoidis Hyperbolici, siue Sphæroidis oblongi, vel prolati, & quarum axes sint æquales, ea est, cuius axis congruat cum axe sectionis, quæ solidum genuit; & respectiuè ad Sphæroides, cum minori axe Ellipsis genitricis.

MINIMA verò, cuius axis congruat cum maiori axe eiusdem Ellipsis.

ETenim quando portiones eiusdem Coni recti, aut Conoidis Hyperbolici, siue Sphæroidis cuiuslibet sunt æquales, & eorum recti Canones sunt *d* æquales; & quando recti Canones siue portiones de eodem angulo, vel Hyperbola, aut Ellipsi æquales sunt, inter ipsorum diametros *MINIMA* est *e* ea, quæ simul sit axis anguli, vel Hyperbolæ, & in Ellipsi, quæ sit axis minor, & *MAXIMA*, quæ sit axis maior, ergo, & dum portiones eiusdem Coni recti, aut Conoidis Hyperbolici, vel Sphæroidis fuerint æquales, inter ipsorum axes (qui iisdem sunt, *f* ac diametri rectorum Canonum) *MINIMVS* erit is, qui congruet cum axe Coni, vel Conoidis Hyperbolici, aut cum minori axe Ellipsis Sphæroidis, & *MAXIMVS*, qui congruat cum maiori: quare si primùm axes harum omnium æqualium portionum, dempta ea circa *MINIMVM* axem, huic *MINIMO* axi æquales secentur, atque ex intersectionibus ducantur plana basibus portionum æquidistantia, auferentur ab ipsis portiones solidæ æqualium axium, sed vnaquæque erit minor quacunque æqualium portionum, (cum sit pars suo toto minor) ac propterea minor ea, è cuius, axe, siue à qua portione nihil ablatũ fuit, quę quidem ea est, cuius axis congruit cum axe Coni recti, vel Conoidis Hyperbolici, & in Sphæroide cum minori axe Ellipsis genitricis. Si ergo omnes aliæ portiones æqualium axium sunt hac portione minores, erit è contra hæc ipsa portio, cuius axis congruit cum axe dati Coni, vel Conoidis Hyperbolici, & pro Sphæroide, cum minori axe genitricis Ellipsis, earundem omnium portionum, æqualium axium, *MAXIMA*. Quod primò erat, &c.

d 84. h.
e Schol. post 51. h. ad nu. 1.
f 3. Schol. 69. h.

PRæterea si axes omnium æqualium portionum eiusdem Sphæroidis producantur, ac prædicto *MAXIMO* axi (qui iam, vt superiùs diximus,

congruit cum maiori axe Sphæroidis) æquales secentur, atque ex interse-ctionum punctis plana ducantur portionum basibus æquidistantia, abscin-dentur portiones solidæ æqualium axium, & vnaquæque erit maior quali-bet æqualium (totum enim sua parte maius est) ac ideò maior ea portione, cuius axi, vel cui portioni nihil additum fuit, quæ quidem est ea, cuius axis congruit cum maiori axe Sphæroidis. Itaque si omnes planæ portiones æqualium axium sunt hac portione maiores, erit è contra hæc ipsa portio, cuius axis conuenit cum maiori axe Sphæroidis, *MINIMA* carundem om-nium portionum æqualium axium, in casibus tamen possibilibus. Quod vl-timò demonstrandum erat.

THEOR. LX. PROP. LXXXX.

MAXIMA portionum de eodem Cono recto, vel de quocun-que Conoide, aut Sphæroide, & quarum bases sint æquales, ea est, cuius axis sit segmentum maioris semi-axis genitricis sectionis dati solidi, respectiuè ad Sphæroides.

In Sphæroide autem, MINIMA, cuius axis sit segmentum mi-noris semi-axis Ellipsis, quæ solidum procreat.

QVando enim portiones eiusdem Coni recti, vel cuiuslibet Conoidis,
a 84. h. aut Sphæroidis sunt æquales, & recti earum Canones sunt a æquales, & cum recti Canones, vel portiones de eodem angulo, vel de
b Schol. post 51. h. ad nu. 2. eadem coni-sectione, quæ solidum genuit æquales sunt, inter ipsorum ba-ses, *MINIMA* est b ea illius portionis, cuius diameter sit segmentum maio-ris axis respectiuè ad Ellipsim, & *MAXIMA* eius, cuius diameter sit segmen-tum minoris, atque vt sunt bases æqualium planarum portionum de eodem
c 2. Coroll. 78. h. angulo, vel coni-sectione, ita sunt c bases solidarum portionum, quarum ipsæ planæ portiones sunt recti Canones, ergo & inter bases æqualium por-tionum de eodem Cono recto, vel Conoide, aut Sphæroide quocunque,
d 3. Schol. 69. h. *MINIMA* erit ea illius portionis, cuius axis (qui idem est d cum diametro recti Canonis) congruat cum maiori axe genitricis sectionis solidi, cuius est portio, & *MAXIMA*, in Sphæroide, erit basis illius portionis, cuius axis sit segmentum minoris axis Ellipsis genitricis eiusdem Sphæroidis; quare si primò intra has æquales portiones, dempta ea super *MINIMA* basi, ducan-tur plana basibus æquidistantia, quorum vnumquodque efficiat in portione sectionem prædictæ *MINIMAE* basi æqualem (hoc autem fieri posse, & quomodò infra docebimus) per huiusmodi plana abscindentur portiones solidæ æqualium basium, sed harum quælibet minor erit quacunque æqua-lium portionum (cum sit pars minor suo toto) ideoque minor ea, à qua ni-hil ablatum fuit, siue minor ea, cuius axis conuenit cum maiori axe dati so-lidi. Si ergo omnes aliæ portiones æqualium basium hac portione sunt mi-nores, erit è contra hæc ipsa portio, cuius axis est segmentum maioris semi-axis sectionis genitricis dati solidi earundem portionum æqualium basium, ac de eodem solido *MAXIMA*, &c.

Quod

QVod autem in quolibet Sphæroide, inter portiones eius dimidio minores, & æqualium basium, *MINIMA* sit ea, cuius axis sit segmentum minoris axis Ellipsis datum Sphæroides procreantis, id consimili constructione, atque argumentis ostendetur, vti factum fuit in secunda parte Prop. 50. huius, si tamen super tertia figura lineæ rectæ, & Ellipses ibi animaduersæ, concipiantur tanquam bases solidarum portionum, & veluti Sphæroidalia solida, &c. Quod fuit, &c.

COROLL.

HInc constat *MINIMAM* portionum semi-Sphæroide maiorum, & quarum bases sint æquales, eam esse, cuius axis sit segmentum maioris axis Ellipsis genitricis; *MAXIMAM* autem, cuius axis sit segmentum minoris.

SCHOLIVM.

QVod superius promissimus absoluetur sic, super figuras prædictæ 50. h. Cum ibi sit A C minor H I, erit quoque dimidium D C minus dimidio F I. Detrahatur ergo F P, quę sit media proportionalis inter F I, D C; agatur P R diametro F O æquidistans, & sectioni occurrens in R, atque ex R applicetur R Q S, & facta figurarum reuolutione circa axim B D, concipiantur describi solida, &c. è quibus cum planis per rectas A C, H I, S R ductis, & ad easdem genitrices sectiones erectis, abscindentur portiones solidæ A B C, H O I inter se [a] æquales, & portio S O R. Dico huius basim per S R ductam, æqualem esse basi per A C. [a] 80. h.

Nam basis per H I ad basim per A C, est [b] vt recta H I ad rectam A C, vel sumptis dimidijs, vt F I ad D C, vel vt quadratum F I, ad quadratum F P, siue ad quadratum Q R, vel sumptis quadruplis, vt quadratum H I ad quadratum S R; sed etiam basis per H I ad basim per S R, est vt quadratum H I ad quadratum S R, cum ob planorum æquidistantiam sint [c] sectiones similes, ergo basis per H I ad basim per A C, erit vt eadem basis per H I ad basim per S R: vnde basis per S R æqualis est basi per A C, &c. Quod facere oportebat. [b] 2. Co- 78. h. [c] Coroll. 15. Arch. de Conoid.

THEOR. LXI. PROP. LXXXXI.

MINIMA portionum de eodem Cono recto, vel de quocunque Conoide, aut Sphæroide, & quarum altitudines sint æquales ea est, cuius axis congruat cum maiori axe genitricis sectionis dati solidi.

In Sphæroide, MAXIMA est, cuius axis cum minori axe eiusdem genitricis sectionis conueniat.

NAm quando portiones de eodem Cono recto, vel Conoide, aut Sphęroide quocunque sunt æquales, & ipsarum recti Canones inter se sunt

a 84. h. sunt a æquales, quando verò recti Canones, siue portiones de eodem angulo, vel de eadem coni-sectione, quæ solidum procreat æquales sunt, inter
b Schol. post 51. h. ad nu. 3. ipsarum altitudines *MAXIMA* est b ea illius portionis, cuius diameter sit segmentum maioris axis, & *MINIMA*, cuius diameter sit segmentum minoris; atque altitudines, & diametri rectorum Canonum, siue planarum
c 3. Schol. 69. h. portionum eædem sunt, c ac altitudines, & axes solidarum, ergo, & dum portiones eiusdem Coni recti, vel Conoidis, aut Sphæroidis sunt æquales, inter earum altitudines *MAXIMA* erit ea illius portionis, cuius axis sit segmentum maioris axis genitricis solidi, cuius est portio, & *MINIMA* eius, cuius axis sit segmentum minoris. Itaque si primò altitudines omnium harum æqualium portionum, (dempta ea circa *MAXIMAM* altitudinem) producantur, & huic *MINIMAE* altitudini æquales fiant, atque ex intersectionum punctis ducantur plana portionum basibus æquidistantia, abscindentur ab ipsis portiones solidæ æqualium altitudinum, & vnaquæque maior erit quacunque æqualium portionum (nam totum sua parte maius est) vnde, & maior ea portione, cuius altitudini, vel cui portioni nihil additum fuit, quæ ea est, cuius axis conuenit cum maiori axe genitricis sectionis dati solidi. Si ergo omnes aliæ portiones æqualium altitudinum hanc portionem excedunt, erit è contra hæc ipsa portio, cuius axis congruit cum maiori axe genitricis sectionis dati solidi aliarum portionum æqualium altitudinum *MINIMA*.

PRo Sphæroide autem, si altitudines omnium prædictarum æqualium portionum (dempta ea circa *MINIMAM* altitudinem, quæ iam ea est circa minorem axem Ellipsis Sphæroidis genitricis) æquales secentur eidem *MINIMAE* altitudini, atque per puncta sectionum, plana solidarum portionum basibus æquidistantia ducantur, hæc à portionibus auferent portiones solidas æqualium altitudinum, sed vnaquæque ipsarum minor erit quacunque æqualium portionum (eò quod pars suo toto sit minor) quapropter & minor ea portione à cuius altitudine, vel à qua portione nihil demptum fuit, quæ quidem est ea, cuius axis congruit cum minori axe Ellipsis datum Sphæroides procreantis: si igitur omnes portiones æqualium altitudinum hac portione sunt minores, erit ex aduerso hæc eadem portio, cuius axis conuenit cum minori axe genitricis Ellipsis dati Sphæroidis earundem omnium portionum, æqualium altitudinum, *MAXIMA*. Quod tandem supererat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HVc etiam, prout exposuimus in Scholio post 51. huius, hæc tria sunt animaduertenda. Videlicet.

1. INter axes æqualium portionum eiusdem Coni recti, vel Conoidis Hyperbolici, aut cuiuscunque Sphæroidis, *MINIMVS* est is eius portionis, cuius axis congruat cum axe, & pro Sphæroide, cum minori axe genitricis sectionis dati solidi, & in Sphæroide *MAXIMVS* eius portionis, cuius axis congruat cum maiori axe eiusdem genitricis sectionis.

2. Inter

2. INter bases æqualium portionum de eodem Cono recto, aut de quocunque Conoide, aut Sphæroide *MINIMA* est ea illius portionis, cuius axis sit segmentum axis, & pro Sphæroide sit segmentum maioris axis genitricis sectionis dati solidi. *MAXIMA* verò eius, cuius axis sit segmentum minoris axis eiusdem sectionis genitricis.

3. INter altitudines æqualium portionum de eodem Cono recto, siue de quolibet Conoide, aut Sphæroide, *MAXIMA* est ea illius portionis, cuius axis congruat cum maiori axe genitricis sectionis dati solidi, & in Sphæroide *MINIMA* eius, cuius axis cum minori axe eiusdem genitricis sectionis conueniat.

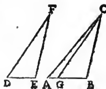
Quæ omnia, ex hucusque demonstratis, paucis ostendentur (vti factum fuit in præfato Scholio, & super easdem figuras 51. h.) consimilibus, ac ibi argumentis, veruntamen circa solidas portiones versantibus, è quibus denique vniuscuiusque trium proximè præcedentium propositionum veritas iterum elucescet. Sed de his hactenus.

MONITVM.

PLacuit SERENO, Antinsensi Philosopho, in quibuslibet Conis terminatis MAXIMVM, & MINIMVM triangulum per verticem ductum inquirere, liceat nobis tanti Geometræ vestigia insequentibus in Cono pariter terminato quocunque MAXIMAM, & MINIMAM Parabolæ portionem assignare, pro cuius indigatione nonnulla circa plana, nec præter susceptam materiam, nec scitu iniucunda occurrunt afferenda.

LEMMA XVI. PROP. XCII.

Si duo triangula habuerint latus lateri æquale, atque alterum adiacentium angulorum in vno triangulo, alteri adiacentium in reliquo æqualem, sitque reliquus angulus adiacentium in primo, maior reliquo adiacentium in altero, & latus illi oppositum, latere huic opposito maius erit.



SInt duo triangula ABC, DEF, quorum latera BC, EF sint æqualia, & anguli pariter ABC, DEF æquales, angulus verò ACB maior sit angulo DFE. Dico, & latus AB maiori angulo oppositũ, maius esse latere DE oppositum minori.

Fiat angulus BCG æqualis ipsi EFD.

Et

Et quoniam angulus quoque G B C ponitur æqualis angulo D E F, & latus B C lateri E F æquale, erunt in triangulis G C B, D F E reliqua latera G B, D E æqualibus angulis oppoſita, inter ſe æqualia, ſed eſt latus A B maius latere B G, cum recta C G ſecet angulum A C B, ergo latus A B erit quoque maius latere D E. Quod erat probandum.

PROBL. XVI. PROP. XCIII.

A data circuli peripheria arcum abſcindere, ita vt rectangulum ſub eius chorda in ſagittam ſit MINIMVM.

1. ESto circulus, cuius diameter A B, centrum C, & exequi oporteat, quod imperatum eſt.

Sumantur in peripheria, hinc inde à puncto A, duo trientes A D, A E, & iungatur chorda D E ſecans diametrum A B in F. Dico arcum D A E eſſe quæſitum; hoc eſt rectangulum ſub eius chorda D E in ſagittam A F eſſe *MAXIMVM*.

Secta enim ſemi-peripheria A K B bifariam in K, iunctaque K C, ac ſumpto in arcu D K quolibet puncto G, quod vel in ipſum K, vel inter K, & D vbicunque cadat, demiſſaque ex G ſuper diametrum A B perpendiculari G H, quæ producta occurrat peripheriæ in I, iungatur G D.

Et cum arcus A G ſit non minor quadrante A K, erit duplus G A I non minor ſemi-circulo, atque arcus D A I omnino maior ſemi-circulo; vnde iuncta G D, angulus I G D erit acutus, eſtque G H B rectus, quare duo ſimul D G H, G H B duobus rectis minores erunt, ex quo G D producta conueniet cum diametro ad partes D, vt in L. Et cum arcus A K D, A I E ſint trientes totius peripheriæ, erit D B E, quod ſupereſt de aſſe, eiuſdem peripheriæ triens, ſiue æqualis arcui A I E, itaque arcus D B I erit maior arcu A I E: ſi ergo iungatur A D, erit angulus A D E, ſiue A D F minor angulo I G D, ſiue parallelarum externo F D L,

ſuntque

funtque in triangulis D F A, D F L anguli ad F æquales, cum fint recti, & latus F D commune, atque angulus A D F minor est angulo L D F, quare & latus A F minus [a] erit latere F L, & A H eò minus F L; habebit ergo H F ad F L minorem rationem, quàm eadem F H ad H A, & componendo H L ad L F, siue G H ad D F, minorem quàm F A ad A H, vnde rectangulum G H A sub extremis minus [b] erit rectangulo D F A sub medijs, & hoc semper, vbicunque sumptum sit punctum G, vel inter D, & K, vel in ipso K, nempe rectangulum ad G, vel K, pertingens, minus esse rectangulo D F A, siue D F A maius esse quocunque prædictorum rectangulorum G H A, vel K C A, &c. [a] 92. h. [b] 16. sept. Pappi.

Si autem punctum sumatur in quadrante A K, vt in O; demissa perpendiculari O P. Cum sit K C maior O P, & C A maior A P, erit rectangulum K C A maius rectangulo O P C, sed rectangulum D F A ostēsum est maius rectangulo K C A, ergo rectangulum D F A eò amplius maius erit rectangulo O P A.

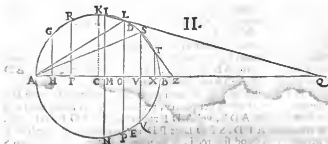
Si denique punctum sumatur in peripheriæ sextante D B, veluti in Q, demissa perpendiculari Q R, & iuncta D Q, & producta, ipsa conueniet omnino cum diametro A B ad partes B, vt in S, quoniam angulus E D Q est in portione E A Q semi-circulo maiori, ac propterea acutus, & angulus D F S rectus est, &c. Et cum arcus A I E æqualis sit arcui D B E, vterque enim est triens peripheriæ, erit arcus A I E maior arcu Q B E, ac ideo angulus A D E, vel A D F maior angulo Q D E, vel S D F, sed in triangulis A F D, S F D latus F D est commune, & anguli ad F sunt æquales, eò quod sint recti, & angulus A D F maior est angulo S D F, vnde latus A F maius est [c] latere F S, & adhuc maius latere R S, habebit ergo F R ad R S maiorem rationem quàm eadem R F ad F A, & componendo F S ad S R, vel D F ad Q R, maiorem quàm R A ad A F; vnde rectangulum D F A sub extremis, maius [d] erit rectangulo Q R A sub medijs, & hoc semper vbicunque assumptum sit punctum Q in sextante D B. Quare cum rectangulum A F D demonstratum sit maius omnibus applicatis, tum in triente A D, tum in sextante D B, ipsum A F D erit *MAXIMUM*, & sumptis duplis, rectangulum sub sagitta A F in chordam D E, erit *MAXIMUM* rectangulum sub qualibet alia sagitta in suam chordam, Quod, &c. Quodque alibi aliter enodabimus. [c] 92. h. [d] 16. sept. Pappi.

2. AD pleniorem autem doctrinā, in proxima sequenti secunda figura, manentibus positione iisdem punctis K, D, E, dico talium rectangulorum id, quod puncto D propinquius est, semper maius esse remotiori.

Nam de ijs, quæ ad arcum quadrantis A K pertingunt, vtputa de rectangulis A C K, A F R, A H G, &c. patet A C K propinquius puncto D maius esse rectangulo A F R, quod ab ipso D magis remouetur, & A F R maius esse A H G, &c. cum, tum altitudines K C, R F, G H, tum bases C A, F A, H A continuè decrescant.

De ijs verò, quæ perueniunt ad arcum K D, videlicet in punctis I, L, ita ratiocinabimur. Demittantur ex I, L ad diametrum perpendiculares I M N, L O P, & iungatur I L, quæ producta conueniet ad partes L cum diametro in Q (nam arcus N A L maior est semi-peripheria, ex

quo angulus NIL est acutus, atque IMO rectus est, ideoque duo simul NIL, IMB duobus rectis minores.) Et cum arcus AE æqualis sit arcui DE, erit arcus AP minor arcu DE, & multò minor arcu LBN: vnde iuncta AL, erit angulus ALP, siue ALO minor angulo LIN, siue LIM, siue angulo QLO parallelarum externo, estque in triangulis ALO, QLO latus OL commune, & anguli ad O sunt æquales, cum sint recti,
a 92. h. ergo latus AO erit minus [a] latere OQ, & AM eò minus OQ; habebit igitur OM ad MA maiorem rationem, quàm MO ad OQ, & componendo OA ad AM maiorem quàm MQ ad QO, vel quàm IM ad LO, vnde rectangulum AOL sub extremis, quod propinquius est puncto D,
b 16. sept. Pappi. maius [b] erit rectangulo AMI sub medijs, quod à puncto D magis distat.



De rectangulis denique pertingentibus ad puncta in sextante DB, nimirum ad S, T, idem sic demonstrabitur. Ductis enim SVY, TX diametro perpendicularibus, & iunctis AS, & ST, hæc producta conueniet cum AB in Z, quoniam angulus TSY est in portione TAY semi-circulo maiori, nempe acutus, & angulus SVB rectus est, &c. Et cum arcus AEY sit triente maior, & arcus YBT minor EBD, siue minor triente, erit angulus ASY, siue ASV maior angulo YST, siue VSZ, & in triangulis ASV, ZSV sunt anguli ad V æquales, cum sint recti, & latus SV com-
c 92. h. mune, ergo latus AV erit [c] maius latere VZ, & eò maius latere XZ: habebit ergo VX ad XZ maiorem rationem quàm ad VA, & componendo VZ ad ZX, siue SV ad TX maiorem rationem quàm XA ad A
d 16. sept. Pappi. V: quapropter rectangulum SVA sub extremis, quod propius est puncto D maius erit [d] rectangulo TXA sub medijs, quod à puncto D magis distat. Quod ex abundanti ostendere propositum fuit.

SCHOLIVM.

EX eo, quod ad num. 1. superiùs ostensum fuit; facilè constat, in prima figura, quæsitam chordam DE secare circuli diametrum AB in F, in ratione ad 1.

Nam iunctis CB, BD. Cum sit arcus BD circuli sextans, ipsius chor-

DB

da BD erit æqualis radio BC, siue CD; vnde in triangulo æquilatero CDB anguli ad C, B, æquales erunt, & in triangulis CFD, BFD cum anguli ad C, B, sint æquales, atque etiam æquales ad F, cum sint recti, & latus DF commune, erit reliquum latus CF, reliquo FB æquale, estq; AC æqualis CB, ergo AF erit tripla FB.

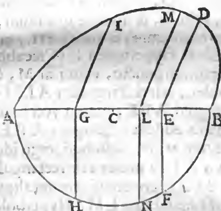
Verum hæc omnia consimili ratione persolui, ac verificari de rectangulis in Ellipsi applicatis, &c. ita sequenti Problemate demonstrabitur.

PROBL. XVII. PROP. XCIV.

Ad diametrum datæ semi-Ellipsis rectam applicare, cuius rectangulum in alterum diametri segmentum sit MAXIMVM.

1. ESto semi-Ellipsis ADB, cuius centrum C, & diameter AB, ad quam applicare oporteat DE, ita vt rectangulum AED sit *MAXIMVM*. Secetur BC bifariam in E, applicceturque ED, quæ erit quæsita.

Nam descripto super AB semi-circulo AFB, erigatur ex E ipsi AB perpendicularis EF. Patet ex præcedenti Scholio, rectangulum AEF esse *MAXIMVM* in semi-circulo, &c. cum AE sit tripla EB.



Sumatur ampliùs quodlibet aliud punctum G, præter E, applicenturq; tum in semi-circulo, tum in semi-Ellipsi rectæ GH, GI. Et cùm sit quadratum EF ad GH vt rectangulum AEB ad AGB, vel vt * quadratum ED ad GI, erit & linea EF ad GH, vt ED ad GI, sed ratio rectanguli AEF ad rectangulum AGH componitur ex ratione EF, ad GH, siue ex ratione ED ad GI, & ex ratione EA ad AG, atque rectangulum AED ad AGI ex iisdem componitur rationibus, vnde rectangulum AEF ad AGH erit vt rectangulum AED ad AGI, & hoc semper, sed est rectangulum AEF *MAXIMVM* in semi-circulo, ergo, & AED erit *MAXIMVM* in semi-Ellipsi. Applicatum est ergo, &c. Quod erat faciendum.

* 21. primi conic.

2. QVod autem eorum, quæ hinc inde à puncto D applicantur, nempe de rectangulis ALM, AGI id, quod *MAXIMO* propius est maius sit remotiori, eadem penitus arte nuper adhibita ostendetur, si ex L in semi-circulo applicetur LN. Nam eodem argumento demonstrabitur rectangulum ALM ad AGI, esse vt ALN ad AGH, sed ALN maius est AGH, prout in præcedenti ad num. 2. conclusum fuit, ergo & rectangulum ALM maius erit rectangulo AGI, & hoc semper verum est, tum

de applicatis ad puncta arcus AID, tum de ijs, quæ pertingunt ad puncta reliqui arcus DB, hoc est prædicta rectangula hinc inde à puncto D, continuè decrescere, quò magis distant à *MAXIMO* rectangulo AED.

Hinc soluendum fit obuiam Problema huiusmodi.

PROBL. XVIII. PROP. XCV.

In dato semi-circulo, vel semi-Ellipsi, hinc inde à MAXIMO rectangulo nuper inuento, bina æqualia rectangula reperire.

SIt datus semi-circulus, vel semi-Ellipsis, cuius diameter AB, centrum C, & punctum, ad quod peruenit *MAXIMVM* rectangulum, sit D, (quod habebitur si diameter AB secetur in L, ita vt AL sit [a] tripla LB, & applicetur LD,) sitque exempli gratia è quolibet puncto E arcus AED, applicata EF ad diametrum AB, & oporteat in reliquo arcu DB punctum G reperire, ita vt ducta GH ipsi EF parallela, rectangula AFE, AHG inter se sint æqualia.

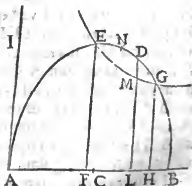
[a] Schol. 93. h. & ex 94. h.

Ducatur ex A sectionem contingens AI, quę ipsis applicatis æquidistabit, atque in angulo asymptotali IAB per punctum E describatur [b] Hyperbole EG. Dico hanc necessariò in aliquo puncto circuli arcum DB secare, vt in G, & hoc esse quæsitum, atque vnicum.

[b] 4. sec. Conic.

Etenim demissa ordinata DL, cum hæc asymptoto AI æquidistet, ipsa necessariò Hyperbolen EG secabit, [c] at in vno tantùm puncto, veluti in M, & ob Hyperbolen, erit rectangulum ALM [d] æquale rectangulo AFE, sed est rectangulum ALD maius eodem rectangulo AFE, cum sit *MAXIMVM*, ex hypothesi, ergo idem rectangulum ALD maius erit rectangulo ALM, atq; est AL communis eorum altitudo, quare LD maior erit LM. Hyperbole igitur EG secat omnino DL inter D, & L, vnde & producta necessariò secabit peripheriam arcus DB, cum spatium LDB sit vndique clausum, & Hyperbole sit infinitæ productionis: secet igitur in G. Dico punctum G quæsitum soluere, vt satis patet, cùm rectangulum GHA, ob Hyperbolen, sit [e] æquale rectangulo EFA.

[c] Coroll. 11. primi huius.
[d] 12. sec. Conic.
[e] ibidem.



Quod autem in nullo alio puncto, præter in E, & G, huiusmodi Hyperbole arcui AD, vel arcui DB occurrat, manifestum est: nam si alibi occurreret, vt in N; esset ob Hyperbolen, rectangulum pertingens ad N æquale rectangulo AFE, quod est falsum, quoniam ob circulum, vel Ellipsim, quando punctum N est inter E, & D, rectangulum ad N maius est quàm rectangulum ad E, & si fuerit inter A, & E, ipso rectangulo ad E minus

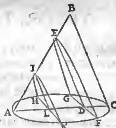
minus est, * prout in præcedenti demonstratum fuit: idemque sequetur, si dicatur Hyperbolen alibi quàm in G arcui D B occurrere. Itaque inuenta sunt in semi-circulo, vel semi-Ellipsi vltrò citròque à *MAXIMO* rectangulo, duo rectangula inter se æqualia. Quod faciendum erat. * 94.h.

PROBL. XIX. PROP. XCVI.

In quocunque Cono terminato, ex infinitis Parabolæ portionibus, quæ à planis inter se æquidistantibus, iuxta quodlibet Coni latus, tanquam regulam ductis, in ipso Cono procreantur, MAXIMAM assignare.

ESto Conus quicunque terminatus A B C, cuius vertex B, basis circulus A C, & quodcunque triangulum per axem ductum sit A B C. Patet, si huiusmodi Conus, & triangulum per axem alio plano secetur, quorum communis sectio D E æquidistet alterutri laterum trianguli per axem, nempe B C, & communis sectio plani secantis per D E cum basi A C, quæ sit F G, sit ad basim A C trianguli per axem perpendicularis, patet inquam sectionem in Cono genitam G E F (quam vocò factam iuxta latus B C, quod communi sectioni E D æquidistat) semper esse *a* quandam Parabolæ portionem: quæritur modò, quæ sit *MAXIMA* harum æquidistantium infinitarum Parabolæ portionum in Cono, iuxta latus B C, tanquam regulam, progenitarum. *a* 1. primi huius.

Secetur diameter A C in D, ita vt A D sit tripla ad D C, & per D agatur planum iuxta regulam B C, vti dictum est, sectionem faciens Parabolen G E F. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam.

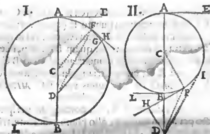


Secto enim Cono, quocunque alio plano iuxta eandem regulam B C, quod sectionem faciat Parabolen H I K, cuius communis sectio cum triangulo per axem sit I L, cum circulo verò sit K L H, erit D E ipsi L I, & F D ipsi K L *b* parallela, quare angulus F D E angulo K L I æqualis *c* erit, vnde, si concipiantur iungi rectæ F E, K I, triangula F D E, K L I cum sint æquiangula ad D, L, habebunt rationem compositam ex latere E D ad I L, siue ex D A ad A L, & ex D F ad L K, sed rectangulum quoque A D F, ad rectangulum A L K habet rationem ex iisdem rationibus compositam, ergo triangulum E D F ad I L H erit vt rectangulum A D F ad A L K, sed rectangulum A D F maius est ipso A L K, cum sit *d* *MAXIMVM*, ergo & triangulum E D F ipso I L K maius erit, & sumptis duplis *e* superbipartientibus tertijs, erit Parabolæ portio G E F maior Parabolæ portione H I K, & hoc semper, vbicunque æquidistans planum ducatur extra G E F *b* 16. vnd. Elem. *c* 10. ibid. *d* 93.h. *e* 17. primi h.

iuxta

Ex centro C ad punctum contactus F ducatur radius CF; patet ipsum cum contingente FH rectum angulum efficere, sed angulus quoque DHF, rectus est ex hypothesi, quare DH ipsi CF est parallela, vnde perpendicularis DH, occurrit tangenti extra punctum contactus F. Iungatur denique DF, &c.

Cum enim ex puncto D in circuli peripheriam cadant rectæ DA, DF, DB, &c. patet, ex elementis, DA, in qua est centrum, *MAXIMAM* esse, nempe maiorem DF, sed est obliqua DF maior perpendiculari DH, ergo DA eò magis maior erit DH. Quod DA quoque sit maior DB, patet cum ipsa sit diametri segmentum, in quo est centrum, & hoc semper ostendetur de quibuslibet alijs perpendicularibus ad contingentes; ergo DA, in qua centrum reperitur, est *MAXIMA* in vtraque figura, etiam si datum punctum cadat in ipsam peripheriam.



In prima verò, iam est DB minor DA; item est DB minor DG, estq; DG minor DH, ergo DB eò amplius est minor DH, & hoc semper de qualibet perpendiculari ad quamcunque contingentem, præter ad punctum D; quare, dum datum punctum D cadit intra circulum, *MINIMA* est DB reliquum diametri segmentum, dempta *MAXIMA*.

Si autem datum punctum incidat in ipsam peripheriam, vt in B: patet perpendicularem ex B, super contingentem ex eodem B ductam, punctum euadere, ac propterea non dari *MINIMAM*, nisi dicatur illud idem punctum esse *MINIMAM*.

Si tandem punctum D cadat extra, vt in secunda figura: ducta ex D circulum contingente DI, constat pariter perpendicularem ductam ex D super ipsam DI in punctum abire, ac ideo in hoc etiam casu non dari *MINIMAM*, &c. Quod vltimò probandum erat.

THEO-

THEOR. LXIII. PROP. XCVIII.

Perpendicularium à vertice Coni scaleni super rectas basis peripheriam contingentes ducibilium, MAXIMA est, quæ super contingentē ex termino MAXIMI lateris Coni ducitur, siue est ipsum MAXIMVM Coni latus: & dum vestigium verticis cadit intra basim, vel in ipsius peripheriam, MINIMA est, quæ super contingentem ex termino MINIMI lateris, siue est idem latus MINIMVM: dum autem cadit extra, MINIMA est, quæ cadit super contingentem ductam à puncto vestigij verticis ad eandem basis peripheriam, siue MINIMA est ipsa Coni altitudo.

ESto Conus scalenus ABC, cuius vertex B, basis AC, centrum D, & altitudo BE basi occurrens in puncto E (quod verticis vestigium voco,) quod vel cadat intra basim, vt in prima figura, vel in ipsam peripheriā, vt in secunda, vel extra, vt in tertia, per quām BE, & per centrum D concipiatur ductum planum efficiens in Cono triangulum ABC, quod rectum erit [a] ad planum circuli AC, eritque triangulum scalenum, cuius maius latus, nempe BA erit [b] *MAXIMVM*, minus verò BC *MINIMVM* laterum, à vertice B ad basis circumferentiam ducibilium.

[a] 14. secundi Sereni.
[b] 15. ibid.

Præterea ex terminis diametri A, C, contingant peripheriam rectæ AF, HC, & ducto per axem quolibet alio plano efficiente triangulum IBL obliquū ad planum basis AC, ex terminis I, L alterius diametri IDL, agantur contingentes IM, LN, & hoc fiat vt contingit, &c. Dico perpendicularium, quæ à vertice B ad ipsas contingentes AF, CH, IM, LN, &c. duci possunt, in sigulis casibus, *MAXIMAM* esse, quæ super AF, atque eam esse ipsum *MAXIMVM* latus BA: in primò autem, & secundò casu *MINIMAM* esse, quæ super CH, atque hanc esse, ipsum *MINIMVM* latus BC: in tertio denique si ex puncto vestigij E ducatur EG peripheriam basis contingens. Dico earundem perpendicularium *MINIMAM* esse, quæ super EG ducitur, & hanc esse ipsam altitudinem BE.

Etenim, in singulis figuris, cum triangulum ABC sit, ex hypothesi rectum ad planum basis AC, & ad communem eorum sectionem AC sit FA perpendicularis (nam est AF contingens circulum, & AD centrum iungens) erit eadem FA recta ad planum ABC, ac propterea recta erit quoque ad AB, quæ est in eodem plano ABC, in quo est AC, hoc est BA perpendicularis erit super contingentem AF; eadem ratione ostendetur BC perpendicularem esse ad contingentem CH.

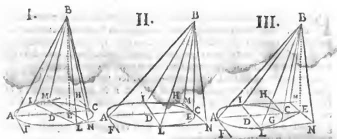
Præterea ducta ex E recta MEN parallela ad IL, cum anguli DIM, DLN sint recti, à contingentibus cum radijs constituti, erunt quoque reliqui parallelarum interni IME, LNE recti. Iungantur denique BM, BN.

Et cum BE sit recta ad planum basis AC, erit etiam planum trianguli MBN, quod per eam ducitur, rectum [c] ad ipsam basim, siue basis recta ad triangulum MBN, estque IM perpendicularis ad eorum communem sectionem

[c] 18. vnd. Elem.

ctionem MN, vt modò ostendimus, ergo, & ad rectam MB, quæ est in eodem trianguli plano perpendicularis erit, siue BM perpendicularis super IM: eodem modo ostendetur BN perpendicularem esse ad LN.

1. IAM perpendicularis BA maior est BC, cum BA sit *MAXIMVM* Coni latus, & BC *MINIMVM*, vt supra monuimus; ob eandem rationem est BA maior BI, sed BI maior est BM, cum BM sit perpendicularis ad IM, ac ideo *MINIMA* ad ipsam IM, ergo BA eò magis maior erit perpendiculari BM: eodem modo demonstrabitur BA maiorem esse perpendiculari BN, & hoc semper, &c. quare in singulis casibus *MAXIMVM* Coni latus BA est *MAXIMA* prædictarum perpendicularium.



2. QVo autem ad *MINIMAM* in prima figura. Est BC minor BA, cum ea sit *MINIMVM* Coni latus. Amplius est [a] perpendicularis EC minor perpendiculari EM, vnde, & quadratum EC minus est quadrato EM, & communi addito quadrato EB, erunt duo simul quadrata CE, EB, siue vnicum quadratum BC, minus duobus simul quadratis ME, EB, siue vnico quadrato BM (ponitur enim BE recta ad basim, ac ideo cum omnibus EC, EM, &c. rectos efficit angulos) hoc est recta BC, quæ perpendicularis est ad contingentem CH, minor erit recta BM, quæ est perpendicularis ad contingentem IM; eadem ratione ostendetur BC minorem esse perpendiculari BN, vel quacunque alia ex B ad quamlibet contingentium ducta: quare BC est ipsarum perpendicularium *MINIMA*. [a] 97. h.

In secunda verò cum altitudo BE congruat cum perpendiculari BC ad contingentem CH, cumque eadem BE sit [b] *MINIMA* ad planum basis AC, erit etiam perpendicularis BC *MINIMA* ad idem planum, hoc est *MINIMA* quarumlibet perpendicularium. In primo igitur, ac secundo casu recta BC, quæ est *MINIMVM* Coni latus, perpendicularium ad prædictas contingentes est *MINIMA*. [b] 52. h.

3. IN tertia denique, cum sit recta BE ad planum basis perpendicularis, ipsa cum contingente EG rectos efficiet [c] angulos, sed ipsa BE est [d] *MINIMA* ad ipsum basis planum, quare, & *MINIMA* quoque erit prædictarum quarumlibet perpendicularium. Quod vltimò ostendere proponebatur. [c] 3. def. 11 Elem. [d] 52. h.

COROLL. I.

EX hac igitur constat in Cono scaleno, tum *MAXIMVM*, tum *MINIMVM* latus perpendiculare esse ad rectas ex eorum extremis terminis basis peripheriam contingentes.

Nam superiùs primo loco demonstrauimus rectam BA, quæ est *MAXIMVM* Coni latus, rectum angulum efficere cum contingente AF, & rectam BC, quæ est latus *MINIMVM*, cum contingente CH rectum pariter angulum constituere.

COROLL. II.

PAtet quoque in eodem Cono scaleno, perpendicularem ex vertice ductam super aliam contingentem ad extrema basis cuiuscunque trianguli per axem non recti ad basim Coni, eam esse, quæ iungit eundem verticem cum intersectione ipsius tangentis cum ea recta linea, quæ à vestigio verticis ipsi basi prædicti trianguli per axem æquidistans ducitur.

In triangulo enim IBL per axem ducto, sed super basim AICL obliquo, ibi demonstratum fuit rectas BM, & BN perpendiculares esse super contingentes IM, & LN, ductas ex terminis I, & L basis IL eiusdem trianguli, atque iam puncta M, & N sunt intersectiones ipsarum tangentium cum recta MEN, quæ per verticis vestigium E æquidistans ducitur ad IL basim trianguli.

THEOR. LXIV. PROP. IC.

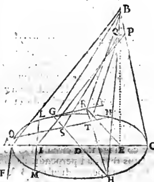
In quocunque Cono scaleno, Parabolæ portiones iuxta quælibet Coni latera genitæ, & quarum diametri, in earum triangulis per axem ab ijsdem lateribus proportionaliter distent, vel quarum bases sint æquales, habent altitudines proportionales perpendicularibus, quę ducuntur à Coni vertice super rectas basis peripheriam contingentes ad puncta, quibus eadem latera occurrunt.

ESto Conus scalenus ABC, cuius vertex B, basis circulus AC, centrum D, & Coni altitudo sit BE, per quam, & per axim ductum sit planum ad basim erectum, efficiens in Cono triangulum ABC: & iterum sectus sit Conus quocunque alio plano per axem efficiente triangulum super basim obliquum GBH, atque iuxta vtriusque horum triangulorum latera BA, BG tanquam regulas, cõcipiantur duci plana, parabolicas portiones efficientia, ita vt communis sectio Parabolæ genitæ iuxta latus BA cum triangulo ABC sit recta PI, (quæ in triangulo ABC æquidistabit lateri BA [a] eritque Parabolæ diameter) & cum basi AC sit recta LIM (quæ rectæ ADC erit perpendicularis, atque eiusdem Parabolæ basis) communis autem sectio Parabolæ genitæ iuxta latus BG cum triangulo GBH, sit recta QS, (quæ parallela erit ipsi BG, ac item erit [b] diameter Parabolæ) & cum

[a] 1. primi huius.

[b] ibidem.

& cum basi A C erit recta N S O, (quæ ad rectam G D H erit perpendicularis, & ipsius Parabolæ basis) quæ bases inter se æquales erunt, cum sint rectæ in circulo A C à centro D æqualiter distantes, atque huiusmodi Parabolarum diametri P I, Q S proportionaliter distent à lateribus, seu ab ipsarum regulis B A, B G, ita vt sit B P ad P C, vel A I ad I C, vt B Q ad Q H, vel G S ad S H. Dico altitudinem Parabolæ per P I ad altitudinem Parabolæ per Q S (quæ sunt Parabolæ æqualium basium) habere eandem rationem, ac perpendicularis ex vertice B super contingentem ex A, termino lateris B A, ad perpendicularem ex B super contingentem ex G, termino lateris B G. Et è conuerso, &c.



Nam sit A F basim contingens ad A, siue perpendicularis ad diametrum A C, quæ erit [a] quoq; cum A B perpendicularis: sitque G R contingens ad G, quæ item cum diametro G D H rectos angulos efficiet; atque ex E Coni verticis vestigio, ducatur E R parallela ad H D G, iungaturque B R, quæ super contingentem G R erit [b] perpendicularis, iunctaque H R, quæ rectam G S N secet in T, agatur recta Q T.

a 1. Coroll. 98. h.

b 2. Coroll. ibid.

Iam cum sit I M parallela ad A F, (vtraque enim perpendicularis est ad A C) & I P ad A B; erit angulus P I M [c] æqualis angulo B A F, nempe rectus, quare ipsa P I erit altitudo Parabolicæ portionis, quæ ducitur per P I iuxta latus B A, cum sit M I L eius basis. Præterea cum sit R H ad H T, vt G H ad H S, (ob parallelas R G, T S in triangulo G H R) vel vt B H ad H Q (ob æquidistantes G B, S Q in triangulo G H B) erit in triangulo R H B recta B R parallela ad Q T, estque R G parallela ad T S, ergo angulus Q T S æquabitur [d] angulo B R G, siue rectus erit, ex quo ipsa Q T erit altitudo Parabolicæ portionis ductæ per Q S iuxta latus B G, cum N S O sit basis ipsius Parabolæ. Et quoniam demonstrata est B R parallela ad Q T, erit B R ad Q T, vt B H ad H Q in triangulo B H R, vel vt B C ad C P, ex hypothesi, vel vt B A ad P I, ob parallelas in triangulo A B C, & permutando B R, quæ est perpendicularis ex vertice B super contingentem G R, ad B A, quæ est perpendicularis ex B super contingentem A F, ita Q T, quæ est altitudo Parabolæ per Q S, ad P I, quæ est altitudo Parabolæ per P I, & hoc semper; quare patet propositum.

c 10. vnd. Elem.

d ibidem.

COROLL.

Hinc est, quod Parabolarum in Cono genitarum, iuxta quodlibet latus trianguli per axem ad basem recti, eędē sunt diametri, ac altitudines. Superiùs enim ostendimus diametrum Parabolæ per P I in triangulo per axem A B C iuxta latus B A, esse quoque altitudinem eiusdem Parabolæ.

PROBL. XX. PROP. C.

In dato quocunque Cono ſcaleno, MAXIMAM MAXIMARVM, & MAXIMARVM MINIMAM Parabolæ portionem aſſignare.

ESto Conus ſcalenus A B C, cuius vertex B, baſis B C, centrum D. Oportet inter *MAXIMAS* Parabolas, & *MAXIMAM*, & *MINIMAM* aſſignare.

Secetur Conus plano per axem, & ad baſim erecto, efficiente triangulum A B C. Patet alterum ipſius laterum, vt puta B A eſſe [a] *MAXIMVM*, alterum verò B C *MINIMVM*.

a 15. sec. Sereni.

Radius D A ad partes *MAXIMI* lateris ſecetur bifariam in E, ita vt C E ſit tripla ad E A; & per E iuxta regulam *MAXIMI* lateris B A concipiatur ductum planum efficiens Parabolen: patet hanc eſſe [b] *MAXIMAM* iuxta idem latus B A, quam dico eſſe quoque *MAXIMARVM MAXIMAM*, vbicunque cadat punctum H veſtigium verticis.

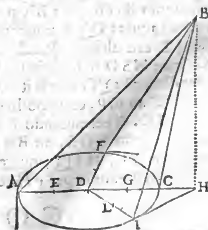
b 96. h.

Nam *MAXIMA* Parabole, ducta per E iuxta latus B A, ad quamlibet aliam *MAXIMAM* Parabolen iuxta aliud quodcunque latus, nempe iuxta B F (cum ipſæ ſint [c] æqualium baſium) eſt homologè, vt altitudo [d] vnius ad altitudinem alterius, ſed altitudo ad altitudinem eſt vt [e] perpendicularis ex B ſuper contingentem circuli B C peripheriam ad punctum A, [f] quæ eſt ipſum latus B A, ad perpendicularem ex B ſuper contingentem ad punctum F, atque perpendicularis B A maior eſt perpendiculari ex B ſuper contingentem ad F, cum ipſa B A ſit [g] earundem perpendicularium *MAXIMA*, ergo; & *MAXIMA* Parabole ducta per E iuxta latus B A erit maior *MAXIMA* Parabola ducta iuxta latus B F, & hoc ſemper, vnde ipſa ducta per E iuxta *MAXIMVM* Coni latus B A, erit *MAXIMARVM MAXIMA*: quod primò erat, &c.

c Coroll. 96. h. d 15. primi h. e 99. h. f 1. Coroll. 98. h. g 98. h. ad num. 1.

Præterea ſi H veſtigium verticis B ceciderit, vel intra circulum B C, vel in ipſius peripheriã: ſecto radio D C, (qui eſt ad partem *MINIMI* lateris B C Coni A B C) bifariam in G, & per ipſum ducto plano iuxta regulam lateris B C efficiente *MAXIMA* [h] Parabola. Dico hanc eſſe *MAXIMARVM*, *MINIMAM* quæſitam.

h 96. h.



Etenim *MAXIMA* Parabole per G iuxta latus B C, ad quamcumque aliam *MAXIMAM* iuxta quodcunque aliud latus B F, eſt homologè [i] vt altitudo vnius ad altitudinem alterius, cum ipſæ ſint [l] æqualium baſium; ſed altitudo ad altitudinem eſt vt [m] perpendicularis, ex B ſuper contingentem ad C, quæ [n] eſt ipſum *MINIMVM* latus B C, ad perpendicularem ex B ſuper contingentem ad F, & per-

i 15. primi huius. l Coroll. 96. h. m 99. h. n 1. Coroll. 98. h.

& perpendicularis B C minor est perpendiculari ex B super contingentem ad F, cum ea B C sit ipsarum perpendicularium [a] *MINIMA*, ergo, & *MAXIMA* Parabole per G ducta iuxta Coni latus B C, erit minor *MAXIMA* Parabola genita iuxta latus B F, & hoc semper; quapropter ipsa *MAXIMA* Parabole, ducta per G iuxta *MINIMVM* Coni latus B C, in his casibus, erit *MAXIMARVM MINIMA*. Quod secundò erat, &c.

a 98. h. ad num. 2.

Si tandem vestigium verticis H ceciderit extra basim Coni, vti apparet in hac figura. Ducta contingente H I, atque iuncta B I, si radius D I bifariam secetur in puncto L, per quod iuxta latus B I ducatur planum Parabolen efficiens, quæ erit *MAXIMA*. Dico hanc esse *MAXIMARVM MINIMAM*.

Quoniam *MAXIMA* per L iuxta latus B I ad *MAXIMAM* iuxta aliud quodcunque latus B F, est vt [b] altitudo ad altitudinem, cum ipsæ Parabolæ sint [c] æqualium basium, sed altitudo ad altitudinem est vt [d] perpendicularis ex B super contingentem ad I, quæ est ipsa B H Coni altitudo (quæ ad omnes rectas in plano basis Coni ad punctum H pertingentes est [e] perpendicularis) ad perpendicularem ex B super contingentem ad F, & perpendicularis B H minor est perpendiculari ex B super contingentem ad F, cum ipsa sit [f] huiusmodi perpendicularium *MINIMA*, quare, & *MAXIMA* Parabole iuxta latus B I, iungens Coni verticem, & contactum rectæ lineæ H I, quæ à vestigio H ad peripheriam basis ducitur, minor erit *MAXIMA* Parabola iuxta latus B F, & hoc semper, vnde ipsa *MAXIMA* Parabole per L iuxta latus B I, erit, in hoc casu, *MAXIMARVM MINIMA*. Quod vltimò faciendum erat, quodque esto DIVINATIONIS; ac

b 15. primi h.
c Coroll. 96. h.
d 99. h.
e ex def. 3. vnd. Ele.
f 98. h. ad num. 3.

LIBRI SECVNDI FINIS.

AD

ADDENDA LIB. II.

Pag. 53. Coroll. I. ita restituendum.

HInc est, quod applicatæ ex terminis çqualium diametrorum in Parabola, vel (in reliquis sectionibus) ex punctis proportionaliter diuidentibus semi-diametros ad quemlibet angulum constitutas; nempe quod bases çqualium portionum de eadem coni-sectione, vel circulo, omnino se mutuò secant inter diametros; & quod rectæ lineæ, tum harum applicatarum, vel basium portionum puncta media, tum extrema iungentes, rectæ semi-diametrorum terminos iungenti æquidistant.

Demonstratum est enim rectas H I, E C, quæ sunt bases æqualiū portionum H E I, A B C, secare se mutuò in M inter diametros E D, B D; & iunctas H C, G F, A I ipsi E B esse parallelas.

Pag. 59. post Coroll. adde sequens

SCHOLIVM.

QVod in Ellipsi demonstratum fuit de portionibus A B C, H M I, semi-Ellipsi minoribus, idem sequitur de maioribus A H C, H C I, quarum bases A C, H I similem concentricam interiorem Ellipsim contingunt; nempe has quoque inter se æquales esse. Nam ipsæ portiones A H C, H C I sunt partes superstites de eadem Ellipsi A B C H, demptis æqualibus portionibus A B C, H M I.

Pag. 61. post Coroll. II.

COROLL. III.

PAtet denique in Parabolis parallelis, vel in similibus concentricis Hyperbolis, aut Ellipsibus, vel Circulis A B C, D E F, omnia rectangula sub segmentis applicatarum, inter se, & prædictæ contingenti A E C æquidistantium (quorum vnum est rectangulum G D H, vel G F H) esse inter se æqualia, cum quodlibet ipsorum æquale sit eidem quadrato semitangentis A E.

VINCENTII VIVIANI
AD LIB. DE MAX. ET MIN.
APPENDIX.



MONITVM.

HACTENVS *habes Amice Lector plurima eorum, quæ iamdiu occasione Diuinationis in V. Conicor. excogitauimus, dum ex tribus illis fasciculis SERENISS. LEOPOLDI inuicto testimonio comprobatis, de quibus latiùs in Proœmio, priorem exinaniuimus, alterum extenuauimus. Ex eorum reliquijs tertium saltem librum efformare statueramus, circa MAXIMAS pariter, ac MINIMAS magnitudines versantem, atque amplius illas eiusdem nominis, quæ à MAXIMIS, & MINIMIS plus minusue recedunt excutientem; quod rarò hucusque, ac tantùm necessitate cogente demonstrauimus, quodque de industria omisimus, tum ne à suscepta materia longiùs discederemus, tum vt ipsam expeditiùs persolueremus. Verùm graues, ac diuturnæ egritudines, quæ nos, huic editioni incumbentes, exagitarunt, ita ipsimet remoram fecere, totque è contra sunt stimuli ad hoc in vulgus manandum, vt cætera ad aliud tempus proferre cogamur, si hæc tibi grata comperiamus. Liceat tamen ex tertio libro quasdam Propositiones aliunde receptas desumere, atque Appendicis nomine huc apponere, ad id præsertim impulsi, tum quod nostræ harum Propositionum demonstrationes huic tertio libro sint penitus inutiles, tum quia pollicitam quorundam fidem, quibus has pateferamus, solidam incorruptamque prorsus non inuenerimus.*

Duo potissimùm sunt Problemata, quibus hæc Appendicula conflatur.

Primum (vti constat ex quadam variarum Propositionum narratione, quæ inter summum Geometram Torricellium, præstantioresque Galliæ, ne

liæ, ne dicam Europæ Mathematicos intercessere, quales, inter hos D. Fermat Senator Tholosanus, D. Roberuallius in Parisiensi Academia Regius Mathematum Professor, ac D. de Verdus) præfatus Cl. Vir de Fermat ipsi Torricellio olim proposuerat, qui licet statim in ipsius solutionem non incidisset, inde mox animaduertens Problema determinatum esse, illud demum triplici via, altera nimirum per locos planos, reliquis per solidos demonstrauit, nobisque postmodum exercitationis gratia hunc, qui sequitur modum enodandum tradidit.

Dato triangulo, cuius vnusquisq; angulorum minor sit graduum 120. punctum reperire, à quo si ad angulos tres rectæ educantur ipsarum aggregatum sit MINIMVM.

Quod, vt vera fatear, non nisi iteratis oppugnationibus tunc nobis vincere datum fuit, sed aggressione omnino ab alijs discrepante, ac, ni decipimur, satis iucunda, & ad ipsiusmet Problematis propagationem valde accommoda, dum non tantum ad tria data puncta, (qualia sunt vertices angulorum propositi trianguli) verum etiam ad quotquot libuerit, ex alio quæsito puncto, MINIMVM eductarum aggregatum reperiri queat, manente tamen determinata eorum positione, prout determinatum est prædictum triangulum.

Alterum Problema præclarissimum Virum, & Auorum splendore, & morum integritate conspicuum agnoscit Auctorem: P. Honoratum Fabbri, natione Gallum, in Iesuitarum celeberrima Societate magni nominis Theologum, omnigena historiarum, humaniorumque literarum eruditione decoratum, Mathematicum præstantissimum, Philosophum acutissimum, qui olim Lugduni apud Gallos Philosophiam publicè edocens, summam egregij acuminis famam sibi peperit, quod manifestò testantur (ita nobis asserente alibi iam, sed parum commendato nobilissimo Adolescente Laurentio Magalotti tanti Viri amantissimo, & obsequentissimo) quædam ipsius PROPOSITIONES PHYSICAE, CVM BREVISSIMIS RATIONVM MOMENTIS, tunc ibidem publici iuris factæ, & prout fusius, Deo dante, patebit ex nouis eiusdem geometricis, ac physicomathematicis contemplationibus, quibus Literatorum Respublica aliquando se locupletaturam expectat.

Hoc igitur Problema, anno 1656. idem Cl. Adolescens Laurentius Magaloti, (dum in Pisano Lyceo Iurisprudentiam excoleret) à prædicto P. Fabbri, tunc Romæ immorante receperat, nobisque per epistolam, Pisis, sub 27. Decembris datam communicarat, cui post triduum rescribentes, vniuersaliorem quæsiti propositionem, ita exposuimus;

Dua-

Duabus datis rectis lineis terminatis, non modò ad rectum, sed ad quemlibet angulum constitutis, & per vnius ipsarum terminum alia alteri ipsarum æquidistanter ducta, ad contrarias tamen partes, & in infinitum producta: oportet per extremum terminum alterius, rectam ducere æquidistanti occurrentem, quæ cum bina similia triangula ad verticem constituat, ipsorum aggregatum sit MINIMA quantitas.

simulque nostram Problematis enodationem his verbis enunciauimus;

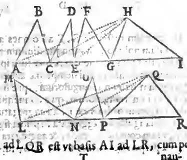
Diuidatur secanda linea, ita vt segmentum ipsius propè terminatam parallelam, ad segmentum reliquum sit in ratione diametri cuiuslibet quadrati ad excessum diametri super latus: nam pūctum intersectionis erit quæsitum.

ac demum de inuentione binorum æqualium ex triangulis aggregatorum, tam supra, quàm infra punctum MINIMI aggregati eundem Cl. Adolescentem commonefecimus. Sed iam Appendicem aggrediamur.

LEMMA I. PROP. I.

Si fuerint duo ordines quotcunque triangulorum æqualem altitudinem habentium; erit aggregatum basium triangulorum primi ordinis, ad aggregatum basium triangulorum secundi, vt aggregatum triangulorum primi, ad aggregatum triangulorum secundi ordinis.

SIt vnus ordo triangulorum ABC, CDE, EFG, GHI, alter verò triangulorum ordo LMN, NOP, PQR, & omnia sint æqualis altitudinis, vtriusque autem ordinis triangula sint ad easdem partes, & ipsorum bases in directum disponātur, quarum basium aggregatum, in primo sit AI, & in secundo sit LR. Dico aggregatum AI, ad aggregatum LR esse vt aggregatum triangulorum primi ordinis ad aggregatum triangulorū secūdi,



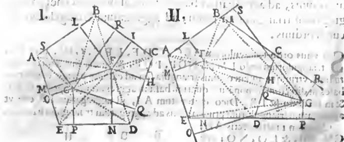
Quoniam iunctis rectis AH, CH, EH; & LQ, NQ: erit triangulum ABC equale triangulo AHC; (cum sint super eadem basi AC, & habeant ex hypothesi eandem altitudinem) & CDE equale CHE, ac EFG æquale EHG; vnde communi addito GHI, erunt omnia simul primi ordinis æqualia vnico AHI: item ostēdetur omnia simul secundi ordinis æqualia esse vnico LQR; sed triangulum AHI ad LQR est vt basis AI ad LR, cum ponau-

nantur æqualium altitudinum, quare aggregatum triangulorum primi, ad aggregatum triangulorum secundi ordinis erit, vt A I ad L R, vel vt aggregatum basium primi ordinis ad aggregatum basium secundi, Quod erat, &c.

LEMMA II. PROP. II.

In quocunque polygono regulari, aggregata perpendicularium ex quibuscunque punctis, (quæ tamen non sint extra perimetrum polygoni) super omnia eius latera eductarum, inter se sunt æqualia. Si verò alterum punctorum fuerit extra perimetrum, aggregatum perpendicularium ex eo eductarum, maius semper erit quolibet prædictorum aggregatorum ex puncto, quod non sit extra.

ESto polygonum regulare A B C D E, & duo quælibet puncta F, G, in prima figura, vel intra, vel in ipsius perimetro, à quibus super eius latera eductæ sint perpendiculares F N, F H, F I, F L, F M; & G O, G P, G Q, G R, G S. Dico talium perpendicularium aggregata inter se æqualia esse. Si verò alterum punctorum G, cadat extra, vt in secunda figura, dico aggregatum perpendicularium ex G maius esse quolibet prædictorum aggregatorum, vtputa perpendicularium ex F.



Ductis enim rectis ex G, F ad omnes angulos polygoni, vt in figuris; Patet ipsum polygonum vtrinque diuisum esse in duos triangulorum ordines æquales altitudines habentium, quæ sunt ipsa polygoni latera, super quæ cadunt perpendiculares, (si nempe hæ accipiantur tanquam bases) erit ergo aggregatum basium triangulorum, quæ simul conueniunt in F, ad aggregatum basium triangulorum, quæ conueniunt in G, * vt aggregatum triangulorum, primi ordinis ex F, ad aggregatum triangulorum secundi ex G, sed hęc triangulorum aggregata in prima figura sunt æqualia (nam ipsa idem polygonum complent) ergo, & aggregata basium eorundem, hoc est aggregata perpendicularium ex F, & G, super polygoni latera eductarum,

* per primam Append.

sunt

funt æqualia. In fecunda verò figura, aggregatum triangulorum ex G maius eft aggregato triangulorum ex F, vt fatis patet (cum illud, ipfum polygonum excedat) quare, & aggregatum bafium triangulorum ex G, (quæ funt ipfæ perpendiculares ex G) maius eft aggregato bafium triangulorum ex F, (quæ funt perpendiculares ex F.) Quapropter, &c. Quod erat, &c.

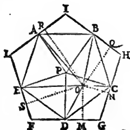
COROLL.

Hinc eft, quod aggregatum perpendicularium ex centro dati polygoni fuper eius latera eductarum, femper eft non maius quolibet ex alio puncto perpendicularium aggregato, vbicunque affumptum fit punctum hoc, vel intra, vel in perimetro, vel extra perimetrum dati polygoni.

THEOR. I. PROP. III.

In quocunque polygono regulari, aggregatorum linearum ex punctis vbicunque affumptis ad ipfius angulos eductarum, MINIMVM eft, quod ex centro.

Sit polygonum regulare A B C D E, cuius centrum P, à quo ad angulos eductæ fint rectę P A, P B, P C, P D, P E, fumptoq; vbicunque alio puncto O, vel intra polygonum A B C D E, vel in eius perimetro, vel extra, iungantur item O A, O B, O C, O D, O E. Dico aggregatum eductarum ex centro P, minus effe aggregato ductarum ex O.



Ex punctis enim A, B, C, D, E, erigantur ipfis P A, P B, P C, P D, P E perpendiculares L I, I H, H G, G F, F L vtrinq; productæ. Patet has fimul conuenire, & polygonum L I H G F dato fimile conftituere circa idem centrum P, ad cuius latera ex puncto O ducantur perpendiculares O R, O Q, O N, O M, O S.

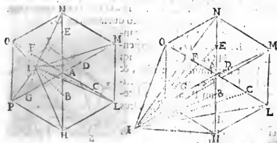
Iam per Coroll. præcedentis Lemmatis in polygono I H G F L aggregatum perpendicularium, quæ ex centro P eft non maius aggregato perpendicularium, quæ ex puncto O vbicunq; affumpto, fed aggregatum perpendicularium ex O, minus eft aggregato obliquarum O A, O B, O C, O D, O E, fuper iifdem lateribus circumfcripti polygoni eductarum, (eft enim perpendicularis O R, minor obliqua O A, & O Q minor O B; O N minor O C; O M minor O D, & O S minor O E) ergo aggregatum perpendicularium ex P, hoc eft ad angulos dati polygoni A B C D E eductarum, eft omnino minus aggregato obliquarum ex O, nempe eductarum ad eofdem angulos dati polygoni à puncto O, vbicunque fit ipfum O. Quare aggregatum ductarum ex centro ad angulos polygoni regularis *MINIMVM* eft. Quod erat, &c.

THEOR. II. PROP. IV.

Si quotcunque rectæ lineæ terminatæ (non minus verò quam tres) cuiuslibet longitudinis, ad vnum idemque punctum occurrant, totidem angulos inter se æquales constituentes, & quatuor rectos complentes. Erit aggregatum harum simul omnium occurrentium, MINIMVM aggregatorum rectarum, à quibuscunque alijs assumptis punctis, ad eosdem datarum terminos eductarum.

Sint quotcunque rectę AB, AC, AD, AE, AF, AG terminatę, quę ad punctum A simul occurrant, constituantque angulos BAC, CAD, DAE, EAF, FAG, GAB inter se æquales, & simul sumpti ęquales quatuor rectis: dico aggregatum harum omniū minus esse aggregato linearum, quæ ex quolibet alio puncto I ad eosdem terminos B, C, D, E, F, G, educi possunt, quales sunt IB, IC, ID, IE, IF, IG.

Sit enim AG *MAXIMA* ductarum ex A, super qua sumatur AP ipsa AG non minor, cui demantur æquales AH, AL, AM, AN, AO, & compleatur polygonum HLMNOP, quod erit æquilaterum, & æquiangulū, siue regulare, cum anguli ad A sint æquales, eiusque centrum erit A; denique iungantur IH, IL, IM, IN, IO, IP.



Iam aggregatum ductarum AH, AL, AM, AN, AO, AP ex centro A ad angulos polygoni, cum sit * *MINIMVM*, erit minus aggregato ductarum IH, IL, IM, IN, IO, IP ex puncto I, sed harum aggregatum minus est aggregato binarum IB, BH; IC, CL; ID, DM; IE, EN; IF, FO; IG, GP; nam IB, BH maiores sunt IH, & IC, CL maiores IL, &c. quare eò magis aggregatum, ex A ductarum, AH, AL, AM, AN, AO, AP minus erit aggregato binarum IB, BH; IC, CL; ID, DM; IE, EN; IF, FO; IG, GP; demptis ergo communibus segmentis BH, CL, DM, EN, FO, GP, erit reliquum aggregatum datarum AB, AC, AD, AE, AF, AG minus reliquo aggregato ductarum IB, IC, ID,

* per 3. Append.

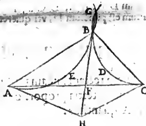
ID, IE, IF, IG ex assumpto puncto I ad datarum terminos B, C, D, E, F, G; itaque aggregatum ductarum ex A æquales angulos inter se efficientes, & quatuor rectos simul complentes est *MINIMVM*. Quod erat, &c.

Hinc solutio Gallici Problematis, sequenti Lemmate præostenso.

LEMMA III. PROP. V.

Si in triangulo ABC fuerit angulus ABC, minor grad. 120. & super latera BA, BC describantur ad partes basis AC similes circuli portiones AEB, CDB capientes angulos graduum 120. Dico ipsarum peripherias se mutuò secare, atque omnino intra triangulum ABC.

NOn enim se contingunt in B: quoniam ducta ex B recta FBG vnam harum portionum peripheriam contingente, ipsa, & alteram quoque continget: quare angulus GBA à contingente, & secante confectus æqualis erit ei, qui fit in alterna portione AEB, nempe erit gr. 120. & ob eandem rationem angulus GBC erit grad. 120. vnde reliquus ABC, è quatuor rectis, erit pariter gr. 120. quod est contra hypothesim, cum sit minor.



Nec autem se secant extra triangulum ad partes G, vt in G: nam ducta GB, esset angulus GBA minor eo, qui fit à contingente ex B cū secante BA, siue minor facto in alterna portione AEB, qui est grad. 120. itemque GBC minor esset gr. 120. quare reliquus ABC è grad. 360. maior esset omnino 120. quod item est contra hypothesim, cum sit minor; quapropter huiusmodi peripherias se mutuò secare infra B ad partes basis AC necesse est.

Verùm ipsarum interfectio haud fiet in basi AC, nec infra, quoniam si in ipsa basi AC, vt in F, esset, ex constructione, angulus AFB grad. 120. siue maior recto, & CFB pariter maior recto; ex quo duo simul AFB, CFB essent duobus rectis maiores; quod est absurdum, cum duos rectos adæquent.

Si tandem eædem peripheriæ se mutuò secarent infra basim AC, vt in H; iunctis AH, CH, essent pariter, ex constructione, duo simul anguli AHB, CHB, siue vnicus AHC maior duobus rectis; quod est falsum cum ipse à duobus rectis deficiat per aggregatum duorum angulorum ACH, CAH. Quamobrem huiusmodi similium portionum peripheriç necessariò se mutuò secabunt, atque intra triangulum ABC. Quod demonstrandum erat.

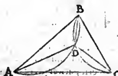
PROBL. I. PROP. VI.

Dato triangulo, cuius vnusquisq; angulorum minor sit gr. 120. punctum reperire, à quo si ad angulos tres rectę educantur, ipsarum aggregatum sit MINIMVM.

ESto triangulum A B C vt ponitur, & inuenire oporteat punctum quale imperatum est.

Super latera B A, B C ad partes basis A C describantur circuli portiones A D B, C D B capientes angulos grad. 120. siue æquales externo cuiuslibet trianguli æquilateri, quarum portionum arcus omnino se mutuò * secabunt intra triangulum A B C, sitque eorum intersectio punctum D. Dico ipsum esse quæsitum.

*5. App.



Nam iunctis D A, D B, D C, erunt anguli A D B, C D B graduum 120. vnde reliquus A D C, vsque ad quatuor rectorum cõplementum item erit gr. 120. Cum ergo tres rectę D A, D B, D C ad punctum D coeuntes tres æquales angulos efficiant, cumque hi simul sumpti æquales sint quatuor rectis, erit ipsarum D A, D B, D C aggregatum *MINIMA* * quantitas. Quare inuentum est punctum D, vti quærebatur. Quod faciendum erat.

*4. App.

PROBL. II. PROP. VII.

Datam rectam lineam terminatam ita diuidere, vt sumpta partium ipsius tertia proportionali, aggregatum extremarum sit MINIMA quantitas.

ESto data linea A B, quam secare oporteat, vt imperatum est.

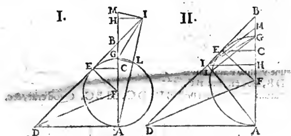
Erigatur ex A ipsi A B perpendicularis, & æqualis A D, iunctaq; D B secetur D E æqualis D A, & ex E super A B perpendicularis demittatur E C. Dico punctum C quæsitum soluere.

Nam bifariam secto angulo A D E per rectam D F secante A B in F, & iuncta F E: cum sit latus D A æquale D E, & D F commune, & anguli A D F, E D F æquales, erunt bases F A, F E æquales, & reliquus angulus F E D reliquo F A D æqualis siue rectus: quare si cum centro F interuallo F A circulus describatur A E G, is transibit quoque per E, & vtramque D A, D B continget in A, E.

Iam cum in semi-circulo sit A C ad C E, vt C E ad C G, sitque C B æqualis C E (cum etiam A D sit æqualis A B) erit A C ad C B, vt C B ad C G. Vnde aggregatum extremarum post segmenta A C, C B erit A G; quod esse *MINIMVM* sic demonstrabitur.

Sum-

Sumpto enim in data recta A B quocunque alio puncto H, vel in ipsius parte producta vltra B, vt in prima figura, vel in ipsa A B, vt in secunda, & ex H ducta H I perpendiculari ad A B, secante diagonalem D B in I, ductaque A I secante circuli peripheriam in L, iunctisque G L, G I: erit angulus A L G rectus, atque externus trianguli L I G; quare internus L I G acutus erit, ac ideo recta I M, quæ ex I erigitur perpendicularis ad I A, hoc est, quæ ipsi L G æquidistat, secabit A B vltra punctum G, vt in M, ac ideo erit A G minor A M. Et cum in triangulo rectangulo A I M, sit vt A H ad H I, ita H I ad H M, sitque H I æqualis H B, erit A H ad H B, vt H B ad H M, ergo A M est aggregatum extremarum proportionalium post partes A H, H B, sed est A G minor A M, vt modò ostendimus: ergo aggregatum A G minus est aggregato A M: & hoc semper vbicunque assumptum fuerit punctum H extra C: ergo aggregatum A G minus est aggregato A M: & hoc semper vbicunque assumptum fuerit punctum H extra C: quare A G est *MINIMVM* aggregatum quæsitum; & recta A B secta est in C, vt imperatum fuit. Quod faciendum erat.



SCHOLIVM.

Si quæratur iuxta quam rationem repertum punctum C diuidat datam A B; id ex ipsa Theorematis constructione elicietur. Nam cum triangula D A B, B E F sint similia inter se, erit B D ad D A, siue diameter quadrati ad latus, vt B F ad F E, vel ad F A, & cum sit B C ad C E, vt C E ad C F, sitque B C æqualis C E (cum & B A æqualis sit A D) erit etiam C E siue C B æqualis C F. Quare si data recta B A diuidatur, ita vt pars B F ad reliquam partem F A, sit vt diameter cuiusdam quadrati ad eius latus, & maior pars B F secetur bifariam in C, hoc ipsum punctum erit quæsitum.

Vel. Cum rectæ A B, A D sint æquales, & perpendiculariter constitutæ, erit A D, siue D E latus quadrati, & D B diameter, & E B excessus diametri super latus, sed est A C ad C B, vt D E ad E B: ergo quæsitum punctum C secat datam rectam A B, ita vt maior pars A C ad minorem C B, sit vt latus cuiusdam quadrati ad excessum diametri super latus, quæ ratio, vt iam constat, cadit inter terminos incommensurabiles.

LEM-

LEMMA IV. PROP. VIII.

Si in triangulo ABC, cuius basis AB, ex vertice C ducta sit CE ipsi BA parallela, vel ad easdem, vel ad oppositas partes, & ducatur quælibet ADE vtranque BC, CE secans in D, & E: dico aggregatum triangulorum ADB, DCE ad triangulum ACB esse vt aggregatum extremarum post BD, DC, ad BC.

SVmatur DF tertia proportionalis post BD, DC.

Iam triangulum DCE ad ADC est vt ED ad DA, vel vt CD ad DB, vel vt DF ad DC; & triangulum ADC ad triangulum ABC, est vt DC ad CB, ergo ex æquali triangulum DCE ad ABC, erit vt DF ad CB; sed triangulum ADB ad idem ABC est vt BD ad BC, quare duo simul triangula DCE, ADB, ad triangulum ACB, erunt vt duæ simul lineæ DF, DB, hoc est tota BF, aggregatum extremarum post BD, DC, ad BC. Quod erat, &c.

PROBL. III. PROP. IX.

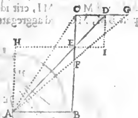
Duabus datis rectis lineis terminatis ad quemlibet angulum constitutis, & per vnius ipsarum terminum alia alteri datarum æquidistanter ducta, ad contrarias tamen partes, & in infinitum producta: oportet per extremum terminum alterius, rectam ducere æquidistanti occurrentem, ita vt, cum ipsa bina similia triangula ad verticem constituat, horũ aggregatum sit MINIMA quantitas.

SInt AB, BC rectæ lineæ terminatæ ad quemcunque angulum ABC compositæ, sitque CD in infinitum producta ipsi BA parallela, sed ad oppositas partes rectæ CB: oportet ex A rectam ducere, qualis est AD, ita vt aggregatum similium triangulorum AEB, CED ad verticem E sit *MINIMVM*.

Diuidatur BC in E, ita vt BE ad EC sit vt latus cuiusdam quadrati ad excessum diametri super latus: dico punctum E esse quæsitum.

Nam ducta qualibet alia AFG; iunctaque AC: cum aggregatum extremarum proportionalium post BE, EC sit *MINIMVM* (per Scholium prop.

prop. 7. huius) ipsum erit minus aggregato extremarum post B F, F C; quare primum aggregatum, ad rectam B C minorem habebit rationem, quam secundum aggregatum ad eandem B C, sed primum ad B C est * vt aggregatum triangulorum A E B, D E C ad triangulum A C B, & secundum ad eandem B C est vt aggregatum triangulorum A F B, G F C ad idem triangulum A C B, quare aggregatum A E B, D E C ad triangulum A C B minorem habebit rationem quam aggregatum A F B, G F C ad idem triangulum A C B, vnde aggregatum ex A E B, D E C minus erit aggregato ex A F B, G F C, ac propterea aggregatum triangulorum ad punctum E erit *MINIMVM*. Quod faciendum erat. *8. App.

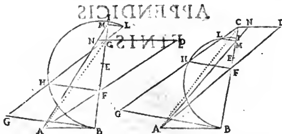


COROLL.

HInc, cum sit vt subduplum ad subduplum, ita duplum ad duplum, si compleantur parallelogramma B H, C I, ipsorum aggregatum erit *MINIMVM*, &c.

PROBL. IV. PROP. X.

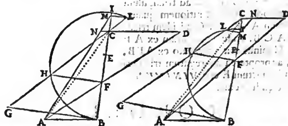
Ijsdem positis, ac in præcedenti. Si datum sit in linea B C; quodlibet aliud punctum F inter inuentum punctum E, & extremum B, & oporteat aliud in ipsa punctum assignare, quæ simul exhibeant aggregata triangulorum ad verticem inter se æqualia.



ERigatur B G perpendicularis, & æqualis ipsi B C, iungatur G C, & per F agatur F H æquidistans B G, & fiat vt B F ad F H, ita F H ad aliam F I, & circa diametrum B I circulus describatur rectam G C secans in H, & L, & ex L ducatur L M parallela ad G B; dico punctum M esse quæsitum, hoc est si producantur A F, A M rectam C D secantes in D, & N;

& N; aggregatum triangulorum A F B, D F C, æquale esse aggregato triangulorum A M B, N M C.

Quoniam cum sit vt B F ad F H, ita F H, vel F C ad F I, erit B I aggregatum extremarum B F, F I, post B F, F C. Item cum sit B M ad M L, vt M L, vel M C ad M I, erit idem B I aggregatum extremarum B M, M I; post B M, M C; sed aggregatum triangulorum ad F ad triangulum A B C



(iuncta A C) est * vt aggregatum extremarum post B F, F C ad B C, & aggregatum triangulorum ad M ad idem triangulum A B C est vt aggregatum extremarum post B M, M C ad eandem B C, suntque prædicta extremarum aggregata inter se æqualia, cum vtrinque conficiant eandem B I, quare, & aggregatum triangulorum A F B, D F C, æquale erit aggregato triangulorum A M B, N M C. Quod faciendum erat.

* 8. App.

APPENDICIS FINIS.

LECTOR BENEVOLE.

Errata, quæ non nisi peracta Operis impressione pacato animo adnotare potuimus, & quæ partim ob nostrum authographum multis lituris, & contractionibus conspersum, in Amanuensis transcriptione exciderunt, partim ex Typothetæ incuria irrepserunt, quæque ipso calamo restitui nequeunt, antequam ad lectionem accedas, ita suis locis corrigere te rogatum volumus. Reliqua minutiora ad orthographiam præsertim pertinentia, veluti, & quasdam paucas citationes turbatas, vel omissas æquissimo iudicio tuo relinquimus emendandas.

Pag. 17. vers. 12. ductæ diametro BD - ductæ ad diametrum BD | p. 18. v. 10. & diametro - & ad diametrum v. 14. & diametro - & ad diametrum | p. 20. v. 6. & ab ipsa ex - & ex ipsa à | p. 31. v. 9. A B C, ABC - A B C, ADC | v. 11. & quod de - & quod prius de | v. 38. 40. 41. ALCE - DLCE | p. 38. v. 5. à quadam sectionis - à quadam in sectione | p. 47. v. 7. est MINIMA sibi - est MAXIMA sibi | p. 49. v. 4. Hyperbolen AEC, - Hyperbolen HBI | v. 17. MAXIMAM - MINIMAM | v. 35. regula LE - regula LF | p. 51. v. 1. in margine deest citatio - *s.* 1. coroll. 19. h. | p. 55. v. 2. regula IG - regula sit ducta IG | v. 14. CI, & quidem - CI, est quidem | p. 57. v. 5. circū[...]pta: - circumscripta: quam dico esse MINIMAM | p. 58. v. 8. conueniret - conueniret supra C v. 43. GI cum - C[...] cum | p. 59. v. 17. versum AF - versum CF | p. 68. v. 34. & Hyperbole - & similis Hyperbole v. 35. MG, rectu[m] GN, asymptotos OP, & ipsarum - MI, rectum IN, asymptotos OP, & ex ipsarum | p. 74. v. 3. Parabolis hactenus - Parabolis in hac | p. 75. v. 3. AB, BE, item altera - AB, DE, item latera | p. 77. v. 35. ex vertice BG; - ex vertice sit BG; | p. 78. v. 13. adscriptarum asymptotos - adscriptarum regulas, & asymptotos | p. 79. v. 22. Hyperbolæ, per - Hyperbolæ ABC, per | p. 83. v. 7. Iam, cum rectangulum GE 3 sit - Iam, rectangulū GE 3 est | p. 92. v. 10. in puncto Q, - in puncto P, | v. 32. tamen eas eligemus, quę opportunæ - tamen eas in reliquis eligemus, quæ opportunæ | p. 96. v. 14. Hyperbolen circumscribere - Hyperbolen concentricam circumscribere | v. 22. esse MAXIMAM - esse MINIMAM | p. 99. in prima figura, Hyperbole NE concipiatur punctata, & HEK continuata | p. 100. v. 9. latere MINIMAM - latere BR MINIMAM | p. 101. v. 22. rectus latus - transuersum latus | p. 107. v. 10. remotiori. - remotiori GH, | v. vlt. LEG - IEG | p. 109. v. 29. Et enim - Est enim | p. 110. v. 6. Sumatur DE - Iungatur BD, & producatur, & sumatur DE | v. 7. diametro AE - diametro BE | p. 111. v. vlt. adscribitur, cum recto - adscribitur, sed cum recto | p. 112. v. 3. sed BH - sed BA | v. 4. ipsa BH - ipsa BA | v. 24. OM asymptoto - OM asymptotos | v. 39. punctum D - punctum D, & cum dato semi-transuerso E. | p. 114. v. 30. MBN - ABC | p. 120. v. 30. in qua cum - & cum | p. 122. v. 1. in portione - portioni | v. 2. in triangulis - triangulis | v. 8. in Parabola - Parabolæ | v. 11. in ea inscripti - ei inscripti | p. 123. v. 23. cum quælibet - nam quælibet | v. 32. Parabolæ DGF - Parabolæ BGF | p. 125. v. 2. æquale rectangulo - æquale, vel minus rectangulo | v. 8. æquale positum - æquale, vel minus positum | v. 12. secabit sibi - secabit aliam sibi | p. 127. v. 22. vt OF ad FB, & KF - vt OF ad FB, & permutando OK ad OF, vt KB ad BF, & est OK maior OF, ergo, & KB maior est FB, & KF | p. 129. v. 5. cum æquali - cum circumscriptæ æquali | v. 10. sit ipso - sit ipsi | p. 130. v. 12. vt in 83. - vt in 82. | v. 22. vt AF - vt OF | p. 131. v. 1. ALCO - ALCN | v. 13. & è contra, quæ - & è contra, eam, quę | v. 35. si igitur Ellipsis - si igitur | p. 132. v. vlt. KEI maiora - KFI æqualia | p. 133. v. 11. EG, GN - EG, EN | p. 135. v. 42. esse axis - esse minoris axis | p. 142. v. 37. cum LH - cum sit LH | p. 143. v. 12. LH maior - LH minor | v. 13. & HC maior - & HC minor | p. 144. v. 30. pertinentium - pertingentium | p. 146. v. 14. inter *a* contactum - inter contactum | v. 15. cadet totus intra, & si - cadet *a* totus intra Ellipsim, & si | p. 148. v. vlt. sitque DF - sitque BF | pag. 149. v. 20. LA - LH.

Lib. II. errata sic restituenda.

Pag. 1. vers. 14. ipsi BC. - ipsi AC. | p. 5. v. 7. rectangulo æquale est - rectangulo cum quadrato DM æquale est | p. 8. v. 5. in O; cum - in O; FI secet GH in N. Et cum | p. 9. v. 33. MINIMA erit - minor erit quacunque ducibilium | p. 11. v. 25. & reliquam BD - & in secunda figura, reliquam ED | p. 12. v. 11. à vertice distet - à vertice B distet | p. 16. v. 4. prouenire - peruenire | p. 21. v. 6. BD quibus - BD, atque | p. 23. v. 40. Quod, &c. - Quod, &c. Seu FC æqualis est ipsi FA: ergo in hoc casu duæ sunt MINIMAE. | v. 42. vel extra - vel intra | v. 43. ex recta FFG - ex F recta FG | p. 32. v. 9. erit - esset | p. 34. v. 12. MAXIMA ad inclusam - MAXIMA ducibilium ad inclusam | p. 37. v. 2. ademptum - adeptum | v. 34. sumantur - addantur | p. 38. v. 31. sit minor - sit maior | citat. 25. pr. conic. - 27. pr. conic. | p. 42. v. 39. rectangulum GEC - rectangulum GEF | p. 43. v. 25. quadratum QP - quadratum OP | v. 25. contingente QP - contingente OP | v. 26. quadrato QP - quadrato OP | p. 50. v. 3. latera AD - latera parallela AD | p. 51. v. 40. D, M, - D, N, | v. 41. siue erit - atque erit | p. 53. In Coroll. II. dele ea verba in 4. 5. 6. 7. & 8. figura | p. 56. v. 23. communi BE - communi GE | p. 60. v. 9. ex quo NE - ex quo DE | p. 61. v. 5. Hyperbolis, aut Ellipsibus - Hyperbolis, vel circulis, aut Ellipsibus | p. 62. citat. 46. h. - 10. sec. conic. & 46. h. | v. 18. Iam, ducta - Iam, in prima figura, ducta | p. 63. v. 2. Hyperbole - Hyperbolæ | v. 11. BD - BE | v. 13. in D - in E | p. 72. v. 18. producta conueniet - producta, vel conueniet | v. 20. verticis B; qua propter - verticis B; vel in secunda figura aliquando axi æquidistabit, quapropter | v. 24. Coni superficiem - Coni, vel Cylindri superficiem | v. 33. Coni à latere - Coni, vel Cylindri à latere | v. 34. Conicam superficiem - Conicam, vel Cylindricam superficiem | p. 75. v. 41. latera, &c. - latus AC, &c. | p. 76. v. 1. in plano NL - in plano DAC | p. 79. v. 5. ex 20. 22. ac 23. huius - ex 20. ac 22. huius | v. 11. DEB - DE | v. 30. DEB - DE | p. 121. v. vlt. esset alter - esse, alter | p. 129. v. 33. rectangulum - rectangulorum | p. 130. v. penult. in 3. ratione ad 1. - in ratione 3. ad 1.

Imprimatur seruatis seruandis 18. Martij 1658.

Vinc. de Bardis Vic. Gen. Florentiæ.

Excellentissimus Dominus Augustinus Coltellinus Aduocatus, & S. Officij Consultor, videat hoc Opus inscriptum DE MAXIMIS, & MINIMIS, &c. & referat, die 9. Aprilis 1659.

F. Gabriel Pierotius Florentinus S. Officij Flor. Cancell. &c.

Sic diuinare licet Reuerendiss. Pater, nec malè de arte sua audiet Mathematicus, dum per retortos linearum tramites itur ad rectam geometricæ veritatis; bonis interim lætantibus, cum nihil obliquum ab orthodoxa fide inueniatur S. R. E. inuisum, prout refero. Die xvj. April. MDCLIX.

Augustinus Coltellini manu propria.

Stante prædicta attestatione imprimatur. Hac die 19. April. 1659.

F. Gabriel Pierotius S. Officij Flor. Cancell. de mandato.

Alexander Victorius Serenis. Magni Ducis Auditor.

